Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Resolução Numérica das Equações de Águas Rasas 1D pelo Método de Galerkin Descontínuo

Robson Carlos de Moura Junior[1] Maicon Ribeiro Correa[2]
IMECC/UNICAMP, Campinas, SP

1 Introdução

As equações de águas rasas unidimensionais modelam o fluxo não-estável de um fluido newtoniano incompressível em canais abertos e são dadas pela conservação da massa e do momento linear. Estas equações são usualmente chamadas de equações de Saint-Venant, nome que é devido ao engenheiro francês Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant, que as publicou pela primeira vez em 1871.

Para um canal retangular uniforme de comprimento 1 e um intervalo de tempo $(0, T)$, as equações de Saint-Venant são escritas por

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T); \tag{1}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2}\right) = gh\left(-\frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{n^2 q|q|}{R^{4/3}h}\right), \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T]. \tag{2}$$

As variáveis procuradas são a profundidade da água h, e a vazão q. Os demais termos são a aceleração gravitacional g, a elevação do leito $z_b(x)$, o coeficiente de Manning n e o raio hidráulico da seção transversal R.

Podemos escrever as equações (1) e (2) na forma de lei de balanço

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x &= \boldsymbol{s}(\boldsymbol{u}(x,t)), \quad \text{em } (0,1) \times (0,T); & (3)\\ \boldsymbol{u}(x,0) &= \boldsymbol{g}(x), \quad \text{para todo } x \in (0,1). & (4) \end{aligned}$$

E condições de fronteira adequadas, onde

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} q \\ \dfrac{q^2}{h} + \dfrac{gh^2}{2} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{s}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ gh\left(-\dfrac{\partial z_b}{\partial x} - \dfrac{n^2 q|q|}{R^{4/3}h}\right) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Seja $\{x_{j-1/2}, x_{j+1/2}\}_{j=1}^{N}$ uma partição do intervalo $(0,1)$ com intervalos da partição $I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$, e tamanho $\Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$. Cada intervalo I_j será um *elemento* do nosso domínio espacial $(0,1)$. Iremos aproximar a solução exata por uma solução numérica em cada elemento I_j do domínio. Esta solução numérica em cada intervalo I_j pertencerá a um subespaço de dimensão finita de $L^2(0,1)$, que chamaremos de espaço de aproximação V_h.

O subespaço de dimensão finita de $L^2(0,1)$ utilizado no método é o espaço de polinômios de grau até k.

$$V_h := V_h^k := \{v \in L^2(0,1); v\big|_{I_j} \in P^k(I_j),\ j = 1, 2, \ldots, N\}. \tag{6}$$

[1]robson.ejr@gmail.com
[2]maicon@ime.unicamp.br

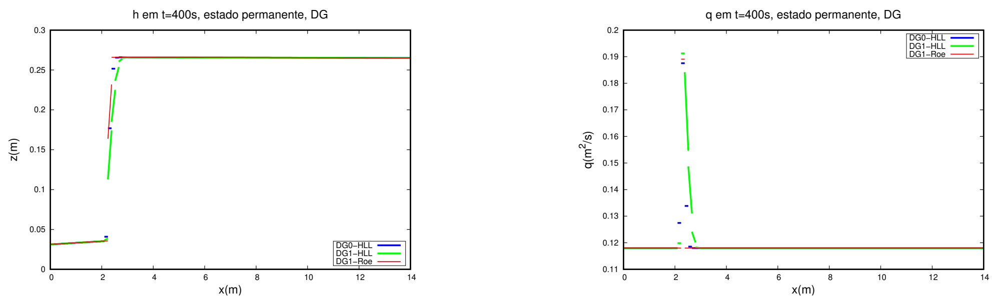
A formulação variacional local do problema (3)-(4) é dada por

$$\begin{aligned}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \partial_t u_{h,i}(x,t) v_h(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f(u_{h,i}(x,t))\partial_x v_h(x)\,\mathrm{d}x \\ + f(u_{h,i}(x_{j+1/2},t))v_h(x_{j+1/2}) - f(u_{h,i}(x_{j-1/2},t))v_h(x_{j-1/2}) = 0\ ,\ i = 1,2;\end{aligned} \tag{7}$$

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_{h,i}(x,0)v_h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} g(x)v_h(x)\,\mathrm{d}x,\ i = 1,2. \tag{8}$$

Queremos obter uma solução aproximada $u_h = [u_{h,1}, u_{h,2}]^T$ onde $u_{h,1}, u_{h,2} \in V_h$ e tal que a formulação variacional seja válida para $u_{h,1}$ e $u_{h,2}$. A formulação variacional local (7)-(8) gera um sistema de EDO's acopladas que pode ser resolvido por um esquema de evolução temporal. O esquema utilizado será o SSP Runge-Kutta (SSP-RK). Outro problema a ser tratado é o surgimento de oscilações espúrias quando escolhemos a base de V_h sendo formada por polinômios de grau maior que 1, o que é previsto pelo Teorema de Godunov. Este problema é resolvido com o uso de limitadores de inclinação. Para mais informações, consulte [1].

Neste trabalho, iremos apresentar alguns experimentos numéricos para diferentes regimes de fluxo e leitos não horizontais para o problema de águas rasas 1D (1)-(2) seguindo o trabalho de [2]. Abaixo, seguem os resultados da simulação numérica da profundidade da água e da taxa de vazão de um salto hidráulico pelo método proposto. O canal possui 14m de comprimento e 0.46m de largura, com leito horizontal. Tomamos $n = 0.008$ s/m$^{1/3}$. A profundidade da água no tempo inicial é de 0.031m, com taxa de vazão zero. Na montante do canal, uma profundidade da água de 0.031m, e uma descarga na taxa de vazão de 0.118 m^2/s são especificados. Na jusante, a profundidade da água cresce de 0.031m para 0.265m em 50s, e permanece constante igual a 0.265m depois disto. Analisando as figuras 1a e 1b, podemos concluir que o método que obteve melhores resultados foi o método DG1 utilizando o fluxo numérico de Roe.



(a) Profundidade da água

(b) Taxa de Vazão

Figura 1: Profundidade da água e taxa de vazão para um salto hidráulico no tempo $t = 400s$

Referências

[1] B. Cockburn e C. Shu. "TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II. General framework". Em: **Mathematics of computation** 52.186 (1989). ISSN: 0025-5718. DOI: {10.2307/2008474}.

[2] A. A. Khan e W. Lai. **Modeling shallow water flows using the discontinuous Galerkin method**. CRC Press New York, 2014. DOI: https://doi.org/10.1201/b16579.

