Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Número cromático antimágico local de algumas árvores

Lara Rodrigues Ventura[1] Francisca A. M. França[2] Andre E. Brondani[3]
UFF, Volta Redonda, RJ

1 Introdução

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo simples e seja $f : E \to \{1, 2, \ldots, |E|\}$ uma bijeção. Para cada $u \in V(G)$, o peso de u é dado por $w(u) = \sum_{e \in E(u)} f(e)$, onde $E(u)$ é o conjunto de arestas incidentes em u. Se $w(u) \neq w(v)$ para quaisquer dois vértices distintos u e v em $V(G)$, então f é chamada de uma **rotulação antimágica** de G. Um grafo G é chamado **antimágico** se G têm uma rotulação antimágica. Hartsfield e Ringel [3] apresentam as seguites conjecturas, que ainda permanecem em aberta.

Conjectura 1.1 ([3]). *Todo grafo conexo, exceto K_2, é antimágico.*

Conjectura 1.2 ([3]). *Toda árvore, exceto K_2, é antimágica.*

Um (m, n)-**Retângulo Mágico** R é uma matriz $m \times n$ na qual os primeiros mn inteiros positivos são colocados de forma que a soma de cada linha de R é constante e a soma de cada coluna de R é outra constante (diferente se $m \neq n$). Hagedorn [2] encotrou uma condição necessária e suficiente para a existência de um retângulo mágico, de acordo com o seguite teorema.

Teorema 1.1 ([2]). *Dados os inteiros positivos m e n, existe um (m, n)-retângulo mágico R se e somente se $m \equiv n \mod 2$ e $(m, n) \neq (2, 2)$.*

Em 2017, Arumugan *et al.* [1] introduziram o conceito de rotulação antimágica local e número cromático antimágico local de um grafo, de acordo com a definição a seguir.

Definição 1.1. *Seja $G = (V, E)$ um grafo de ordem n e tamanho m e sem vértices isolados. Uma bijeção $f : E \to \{1, 2, \ldots, m\}$ é dita uma rotulação antimágica local se para toda aresta $\{u, v\} \in E$ temos $w(u) \neq w(v)$, onde $w(u) = \sum_{e \in E(u)} f(e)$. Um grafo G é antimágico local se G tem uma rotulação antimágica local.*

A partir do fato de que todo grafo antimágico é um grafo antimágico local, os autores de [1] propõem as seguintes conjecturas:

Conjectura 1.3. *Todo grafo conexo exceto, K_2, é antimágico local.*

Conjectura 1.4. *Toda árvore, exceto K_2, é antimágica local.*

Definição 1.2. *O **número cromático antimágico local**, $\chi_{la}(G)$, é definido como o número mínimo de cores tomadas sobre todas as colorações de G induzidas por rotulações antimágicas locais de G.*

[1]laraventura@id.uff.br
[2]francisca_franca@id.uff.br
[3]andrebrondani@id.uff.br

O teorema a seguir, estabelece uma cota inferior para o número cromático antimágico local de uma árvore em função da quantidade de seus vértices de grau 1.

Teorema 1.2 ([1])**.** *Para qualquer árvore T com l folhas,* $\chi_{la}(T) \geq l + 1$.

Uma **árvore de Bethe** $\mathcal{B}_{d,k}$ é uma árvore enraizada com k níveis cuja raiz está no nível 1 e tem grau d, os vértices dos níveis de 2 a $k-1$ possuem os graus iguais a $d+1$ e os vértices do nível k tem grau 1. Exemplificamos uma árvore de Bethe na figura a seguir.

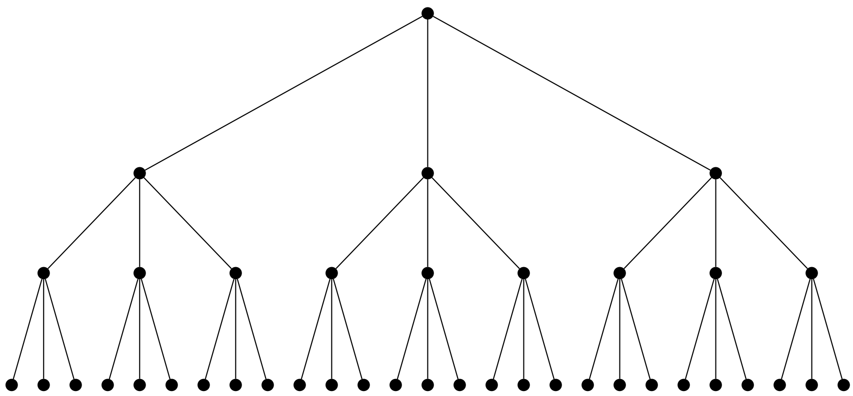

Figura 1: árvore de Bethe $\mathcal{B}_{3,4}$

Este trabalho tem como objetivo apresentar alguns resultados obtidos ao determinar rotulações antimágicas locais das árvores de Bethe visando a aplicação do Teorema 1.2. Em particular, determinar o número cromático antimágico local de tais árvores.

Agradecimentos

A primeira autora agradece a Faperj, cujo auxílio consta sob o número de Processo E-26/202.105 /2021 (267164).

Referências

[1] S. Arumugam et al. "Local Antimagic Vertex Coloring of a Graph". Em: **Graphs and Combinatorics** 33 (2017), pp. 275–285. DOI: `10.1007/s00373-017-1758-7`.

[2] T. R. Hagedorn. "Magic rectangles revisited". Em: **Discrete Mathematics** 207 (1999), pp. 65–72. DOI: `10.1016/S0012-365X(99)00041-2`.

[3] N. Hartsfield e G. Ringel. **Pearls in graph theory**. 2a. ed. Boston: Academic Press, INC., 1994. ISBN: 0123285534.

