Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Identificação de Grupos Fuchsianos Aritméticos em Ordens dos Quatérnios

Rafael Ferreira Cardoso [1], Cátia Regina de Oliveira Quilles Queiroz[2]
ICEX/UNIFAL-MG, Alfenas, MG

O presente trabalho abordou a identificação de grupos fuchsianos aritméticos, que são formados por isometrias que fazem o pareamentos dos lados de um polígono hiperbólico, em ordens dos quatérnios, e teve como uma de suas propostas a aplicação da Matemática no estudo da teoria de códigos corretores de erros, bem como na construção desses códigos, que tem como base elementos de Algebra Abstrata, como grupos, anéis, corpos finitos e ordens dos quatérnios, e na análise de métodos capazes de detectar e corrigir erros que possam surgir durante a transmissão ou armazenamento de dados, onde as características geométricas das tesselações envolvidas e da geometria hiperbólica apresentam importante papel na estruturação desse processo.

A álgebra dos quatérnios, que denotaremos por $\mathbb{A}$, é dotada de três unidades imaginárias que podem ser associadas a um espaço tridimensional. Portanto, elas podem ser interpretadas a partir daí como números regidos por uma parte escalar e outra vetorial determinada pelos coeficientes das unidades imaginárias que denominaremos i, j e k. Em linhas gerais, adotamos a seguinte forma para qualquer $q \in \mathbb{A}$ como:

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \ ; \qquad \text{onde } q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Abordamos também as principais características desses números que de maneira direta influenciam na aplicabilidade de seu respectivo tratamento algébrico. É o caso da propriedade mais primitiva proposta pelo matemático William Rowan Hamilton (1805-1865), que desencadeou a criação dos quatérnios:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1. \tag{2}$$

Após uma análise dos princípios básicos dos quatérnios e de suas suas propriedades geométricas, foi realizado o estudo de corpos de números e anéis de inteiros algébricos, que deu embasamento teórico para a identificação dos grupos fuchsianos aritméticos. Logo, nos apoiamos em [6], [7] e [9] para enunciar as principais características algébricas dos corpos de números e, consequentemente, as propriedades que utilizamos para o desenvolvimento da pesquisa. Com base em [5], estudamos os conceitos de isometrias e espaços métricos que se fizeram necessários para o entendimento pleno dos objetos de estudo desta pesquisa. Em seguida, aprofundamos nossos estudos em geometria hiperbólica e tesselações, que permeiam todo esse trabalho, utilizando principalmente [11]. Por fim, com base em [4] estudamos os grupos Fuchsianos, que são grupos de isometrias que fazem os pareamentos dos lados dos polígonos em tesselações hiperbólicas.

Conforme descrito por [8], em Katok [4], e Johansson [3], foi proposta uma maneira aritmética de se obter grupos fuchsianos. Esses grupos são conhecidos como grupos fuchsianos aritméticos. Johansson em [3] mostrou que um grupo fuchsiano aritmético está associado a uma ordem O em uma álgebra dos quatérnios A sobre uma extensão quadrática $\mathbb{K}$ de $\mathbb{Q}$, isto é, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = 2$. A partir da identificação de um grupo fuchsiano aritmético em uma ordem dos quatérnios, foi apresentado

[1]rferreiracardoso@outlook.com
[2]catia@unifal-mg.edu.br

em [2] um algoritmo de rotulamento algébrico dos sinais pertencentes a uma constelação de sinais no plano hiperbólico por elementos de um p-grupo, derivado de uma ordem por um ideal próprio. Em decorrência dessa identificação, obtemos os reticulados hiperbólicos associados à essas constelações. Portanto, a identificação de um grupo fuchsiano aritmético com uma ordem dos quatérnios é o principal passo no processo de rotulamento.

Utilizamos inicialmente os conceitos de álgebra dos quatérnios, que foram fundamentais para os estudos subsequentes. Em seguida, consideramos os reticulados hiperbólicos (ordens dos quatérnios), destacando os grupos fuchsianos obtidos a partir deles. Encerramos com a compreensão dos grupos fuchsianos aritméticos, onde fizemos a conexão dos conceitos e resultados anteriores, utilizando [10].

Baseados em [10], consideramos as tesselações hiperbólicas auto-duais $\{4g, 4g\}$, e identificamos as ordens dos quatérnios associadas aos grupos fuchsianos aritméticos Γ_{4g} dessas tesselações auto-duais, para os valores de g, dados por $g = m \cdot 2^n$, onde $m = 1, 3, 5$ e $n \in \mathbb{N}$. Ainda, utilizando [1], vimos uma condição necessária para a construção de grupos fuchsianos aritméticos, chamada Condição de Fermat, e estudamos um algoritmo para obter os geradores de um grupo fuchsiano aritmético, pois através deles é possível identificar qual a ordem dos quatérnios associada.

Referências

[1] C. W. O. Benedito. **Construção de Grupos Fuchsianos Aritméticos provenientes de Álgebras dos Quatérnios e Ordens Maximais dos Quatérnios Associados a Reticulados Hiperbólicos**. Tese de Doutorado. FEEC-UNICAMP, 2014.

[2] E. D. Carvalho. **Construção e Rotulamento de Constelações de Sinais Geometricamente Uniformes em espaços Euclidianos e Hiperbólicos**. Tese de Doutorado. FEEC-UNICAMP, 2014.

[3] S. Johansson. **Genera of Arithmetic Fuchsian Groups**. Online. Acessado em 08/04/2022, `http://www.math.chalmers.se/Ëœsj/forskning.html`,

[4] S. Katok. **Fuchsian Groups**. The University of Chicago Press, 1992.

[5] E. L. Lima. **Espaços Métricos**. Projeto Euclides, IMPA, 2009.

[6] P. Ribenboim. **Algebraic Numbers**. New York, Wiley-Interscience, 1972.

[7] P. Samuel. **Algebraic Theory of Numbers**. Hermann, Paris, 1970.

[8] R. P. Sousa. **Grupos Fuchsianos Identicados em uma Ordens dos Quatérnios**. Dissertação de Mestrado, CCEN-UFPB, 2009.

[9] I. N. Stewart e D. O. Tall. **Algebraic Number Theory**. Chapman e Hall, 1996.

[10] V. L. Vieira. **Grupos Fuchsianos Artiméticos Identicados em Ordens dos Quatérnios para Construção de Constelaçes de Sinais**. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2007.

[11] C. Walkden. **Hyperbolic Geometry**. Manchester University, 2019.