Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Localização de autovalores em grafos e decomposição arbórea

Leonardo Consorte Veit[1] Carlos Hoppen[2]
UFRGS, Porto Alegre, RS

A Lei da Inércia de Sylvester estabelece que matrizes simétricas congruentes possuem o mesmo número de autovalores positivos, negativos e nulos. Dessa forma, dada uma matriz real simétrica M e um escalar α, podemos determinar o número de autovalores maiores do que α, menores do que α e iguais a α, obtendo uma matriz diagonal D que é congruente a $M - \alpha I$. Esse procedimento permite calcular o número de autovalores de M em um intervalo real I, e é chamado de localização de autovalores. Apesar de focarmos esse trabalho na localização de autovalores, encontrar uma matriz congruente a uma matriz M também é útil para outros parâmetros básicos de matrizes, como o seu posto e seu determinante.

Em 2011, Jacobs e Trevisan [5] elaboraram um algoritmo baseado neste princípio, localizando autovalores da matriz de adjacência $A(T)$ de uma árvore T. O algoritmo, que chamaremos de Algoritmo de Árvore, tem como entradas um número real α e uma árvore T e é executado diretamente sobre os vértices de T, de forma que a matriz M não é utilizada explicitamente. Para execução do algoritmo na árvore T, é escolhido um vértice arbitrário como raiz e em seguida fixa-se um ordenamento dos vértices de T de tal forma que se v_j é filho de v_k então $j < k$. O algoritmo então é aplicado seguindo o ordenamento de vértices, das folhas em direção a raiz. A cada passo são realizadas operações que correspondem a operações elementares de linha na matriz original, seguida pela mesma operação de coluna, mantendo dessa forma a congruência entre as matrizes.

Uma propriedade importante do algoritmo de Jacobs e Trevisan é que sua complexidade é $O(n)$, onde n é o número de vértices da árvore de entrada. Dessa forma, o algoritmo de localização em árvore pode calcular em tempo linear o número de autovalores que se encontram em qualquer intervalo. A partir da criação desse algoritmo, foram desenvolvidos algoritmos de localização para outras classes de grafos, entre elas, grafos unicíclicos, grafos threshold e cografos, além de extensões desses algoritmos para outras matrizes que representam um grafo, como a matriz laplaciana.

Os algoritmos desenvolvidos para classes específicas de grafos foram ferramentas fundamentais para resolver conjecturas importantes em Teoria Espectral de Grafos, muitas delas envolvendo a busca de valores de mínimo ou máximo de algum parâmetro espectral como em [2], [4] e [7].

Recentemente, foram desenvolvidos algoritmos de localização de autovalores mais gerais, que são aplicados a classes de grafos mais abrangentes, mas cuja complexidade depende da existência de uma decomposição conveniente. Em 2021, propôs-se em [3] um algoritmo de localização de autovalores que, como parte da entrada, recebe uma decomposição arbórea do grafo correspondente, que chamaremos de Algoritmo de Localização Arbórea. A decomposição arbórea vem sendo amplamente estudada desde o artigo de Robertson e Seymour [8] de 1986 e o parâmetro associado a ela é chamada de largura arbórea. O algoritmo tem complexidade $O(k^2 n)$ onde k é a largura arbórea de G. Portanto ele é linear para matrizes associadas a grafos que admitem decomposições com k limitado.

[1]leonardo.veit@ufrgs.br
[2]choppen@ufrgs.br

O algoritmo processa o grafo de entrada a partir de uma *nice tree decomposition*. Essa decomposição foi introduzida por Kloks [6] em 1994 e é uma decomposição que pode ser derivada eficientemente de uma decomposição arbórea sem afetar a largura. Seu funcionamento opera através de ordenamento dos vértices semelhante ao algoritmo de localização em árvores, mas é executado sobre a decomposição arbórea do grafo e não diretamente sobre o grafo propriamente dito, dessa forma, podemos utilizar matrizes relacionadas a grafos sem prejuízo ao funcionamento do algoritmo.

O algoritmo de localização de autovalores que utiliza uma decomposição arbórea é uma ferramenta que generalizou vários algoritmos já estudados para classes de grafos mais simples. Entretanto sua entrada pode custosa de acordo com a complexidade do grafo.

O intuito desse trabalho está em analisar situações especiais como o Algoritmo de Decomposição Arbórea obtém de uma matriz diagonal D congruente a M com algoritmos já existentes. Para os algoritmos desenvolvidos quando o grafo é uma árvore [5] ou quando o grafo é unicíclico [1] já obtivemos resultados comparativos. É conhecido que árvores possuem largura arbórea 1 e grafos unicíclicos possuem largura arbórea 2. Dada uma decomposição arbórea conveniente respeitando a largura de cada classe, o Algoritmo de Localização Arbórea produz os mesmos resultados que os algoritmos desenvolvidos para cada classe individualmente, podendo ocorrer uma pequena variação, que sabemos controlar, quando alguma entrada vem a se tornar nula durante o processamento.

Atualmente está sendo explorado o Algoritmo de Localização Arbórea para grafos que admitem uma decomposição de blocos com estruturas simples. Um bloco é um subgrafo conexo maximal de um dado grafo G que não tem vértice de articulação, portanto os blocos são constituídos por pontos isolados, arestas e subgrafos 2-conexos. Já sabemos proceder como o algoritmo funciona quando os subgrafos 2-conexos são ciclos.

Referências

[1] R. O. Braga, V. M. Rodrigues e R. O. Silva. "Locating Eigenvalues of a Symmetric Matrix whose Graph is Unicyclic". Em: **Trends in Computational and Applied Mathematics** 4(22) (2021), pp. 659–674. DOI: 10.5540/tcam.2021.022.04.00659.

[2] E. Fritscher, C. Hoppen, I. Rocha e V. Trevisan. "On the sum of the Laplacian eigenvalues of a tree". Em: **Linear Algebra and its Applications** 435 (2011), pp. 371–399. DOI: 10.1016/j.laa.2011.01.036.

[3] M. Fürer, C. Hoppen e V. Trevisan. "Efficient diagonalization of symmetric matrices associated with graphs of small treewidth". Em: **eprint arXiv** (2021), pp. 1–31. DOI: 10.48550/arXiv.2109.02515.

[4] D.P. Jacobs, E. R. Oliveira e V. Trevisan. "Most Laplacian eigenvalues of a tree are small". Em: **Journal of Combinatorial Theory Series B** 146 (2021), pp. 1–33. DOI: 10.1016/j.jctb.2020.07.003.

[5] D.P. Jacobs e V. Trevisan. "Locating the eigenvalues of trees". Em: **Linear Algebra and its Applications** 434 (2011), pp. 81–88. DOI: 10.1016/j.laa.2010.08.006.

[6] T. Kloks. **Treewidth: Computations and Approximations**. 3a. ed. Vol. 842. Berlin: Springer Verlag, 1994.

[7] E.R. Oliveira, D. Stevanovic e V. Trevisan. "Spectral radius ordering of starlike trees". Em: **Linear and Multilinear Algebra** 68 (2020), pp. 991–1000. DOI: 10.1016/j.laa.2011.01.036.

[8] N. Robertson e P. Seymour. "Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width". Em: **Journal of Algorithms** 7(3) (1986), pp. 309–322. DOI: 10.1016/0196-6774(86)90023-4.