Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Completamento de matrizes de posto reduzido usando gradiente projetado

Tacildo de S. Araujo[1]
IMECC-UNICAMP, Campinas, SP.
Douglas S. Gonçalves [2]
CFM-UFSC, Florianópolis, SC.
Cristiano Torezzan [3]
FCA-UNICAMP, Limeira, SP.

O problema de completamento de matrizes (PCM) consiste em fazer estimativas numéricas para um conjunto de entradas faltantes em uma matriz de dados, de modo a satisfazer determinadas condições de regularização, em geral descritas sob a condição de posto reduzido [1, 6].

Em algumas aplicações, como em geometria de distâncias [2], o posto da matriz alvo é conhecido a priori, e espera-se que a matriz recuperada (completada) possua o posto correto.

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz de posto r, para a qual apenas uma amostra $\{A_{ij} : (i,j) \in \Omega\}$ de suas entradas é conhecida, onde Ω é um subconjunto aleatório de índices de tamanho m. Isto significa que uma fração $p = m/(n^2)$ das entradas de A são conhecidas.

O problema de estimar os dados faltantes em A, sob a condição da solução ter posto no máximo r, pode ser enunciado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{X\in\mathbb{R}^{n\times n}} \quad & \frac{1}{2}\|P_\Omega(X) - P_\Omega(A)\|_F^2 \\ \text{s.a} \quad & \text{posto}(X) \le r, \end{aligned} \tag{1}$$

em que $P_\Omega(X)_{ij} = X_{ij}$ se $(i,j) \in \Omega$ e $P_\Omega(X)_{ij} = 0$, caso contrário. Além disso, $P_\Omega^\perp(X) := X - P_\Omega(X)$.

Neste trabalho, apresentamos resultados preliminares obtidos com um método de Gradiente Projetado (GP) aplicado ao problema (1). Embora o conjunto viável de (1) seja não-convexo, **uma** projeção de uma matriz Y sobre tal conjunto é dada por

$$\text{SVD}_r(Y) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^\top, \tag{2}$$

isto é, uma decomposição em valores singulares truncada de Y [3].

Fazendo $X_1 = Z_1 = 0$, a iteração do método estudado pode ser sintetizada na forma:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \text{SVD}_r\left(P_\Omega(A) + P_\Omega^\perp(Z_k)\right) \\ Z_{k+1} &= X_{k+1} + \frac{k-1}{k+2}\left(X_{k+1} - X_k\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Os experimentos númericos foram conduzidos em matrizes de posto r da forma $A = MN \in \mathbb{R}^{n\times n}$, em que $M \in \mathbb{R}^{n\times r}$ e $N \in \mathbb{R}^{r\times n}$ têm entradas gaussianas independentes e identicamente distribuídas e $r \ll n$. Em seguida, escolhemos aleatoriamente um percentual p das entradas de A como conhecidas.

[1]tacildo.souza@gmail.com
[2]douglas.goncalves@ufsc.br
[3]torezzan@unicamp.br

A Tabela 1 apresenta uma comparação dos resultados obtidos com o GP e com outros métodos bem estabelecidos na literatura, como FRSI [7], e Fixed Point Continuation (FPC) [5]. A tabela reporta o número de iterações (IT), o tempo em segundos (t(s)), o erro relativo (Er) e o posto recuperado ($\hat{r}$).

Tabela 1: Comparação entre os resultados numéricos obtidos com GP, FRSI e FPC.

(n, r, p)	method	IT	t(s)	Er	$\hat{r}$
(500,5,15%)	GP	**99**	**0,99**	**9,7000e-05**	5
	FRSI	360	8,94	1,2757e-04	6
	FPC	114	12,57	1,8077e-04	5
(1000,8,10%)	GP	**145**	**3,99**	**9,7838e-05**	8
	FRSI	627	47,94	1,3007e-04	9
	FPC	388	181,34	1,5211e-02	8
(1500,10,3%)	GP	812	**18,73**	**9,8370e-05**	10
	FRSI	1000	124,11	5,3339e-01	11
	FPC	**179**	866,6	6,6328e-01	113
(2000,10,2%)	GP	1000	**28,21**	**1,0645e-04**	15
	FRSI	1000	225,92	6,7654e-01	16
	FPC	**116**	1804	9,0486e-01	471

Podemos observar que o GP é competitivo quando comparado a métodos bem estabelecidos na literatura, com a vantagem adicional de manter um controle sobre o posto da solução alvo.

Uma linha de investigação futura, diz respeito à teoria de convergência de GP para o problema (1). Uma vez que o conjunto viável de (1) é não-convexo, a teoria clássica não se aplica. Trabalhos recentes [4] analisam a convergência de esquemas similares a (3) mas sob hipóteses muito fortes sobre o problema.

Referências

[1] Emmanuel J Candès e Benjamin Recht. "Exact matrix completion via convex optimization". Em: **Foundations of Computational mathematics** 9.6 (2009), pp. 717–772. DOI: 10.1007/s10208-009-9045-5.

[2] Ivan Dokmanic et al. "Euclidean distance matrices: essential theory, algorithms, and applications". Em: **IEEE Signal Processing Magazine** 32.6 (2015), pp. 12–30. DOI: 10.1109/MSP.2015.2398954.

[3] Carl Eckart e Gale Young. "The approximation of one matrix by another of lower rank". Em: **Psychometrika** 1.3 (1936), pp. 211–218. DOI: 10.1007/BF02288367.

[4] Prateek Jain, Ambuj Tewari e Purushottam Kar. **On iterative hard thresholding methods for high-dimensional m-estimation**. Vol. 27. 2014. ISBN: 9781510800410.

[5] Shiqian Ma, Donald Goldfarb e Lifeng Chen. "Fixed point and Bregman iterative methods for matrix rank minimization". Em: **Mathematical Programming** 128.1 (2011), pp. 321–353. DOI: 10.1007/s10107-009-0306-5.

[6] Rahul Mazumder, Trevor Hastie e Robert Tibshirani. "Spectral regularization algorithms for learning large incomplete matrices". Em: **Journal of Machine Learning Research** 11 (2010), pp. 2287–2322. ISSN: 1533-7928.

[7] Nilson JM Moreira et al. "A novel low-rank matrix completion approach to estimate missing entries in Euclidean distance matrix". Em: **Computational and Applied Mathematics** 37.4 (2018), pp. 4989–4999. DOI: 10.1137/080716542.