

Estudo numérico aplicado à equação não-linear de Richards

Mario Jorge dos Reis Moura¹

PPGMMC/UFRRJ, Seropédica, RJ

Renan de Souza Teixeira² Wilian Jeronimo dos Santos³

DEMAT/UFRRJ, Seropédica, RJ

Escoamentos em meios porosos possuem inúmeras aplicações nas diversas áreas científicas, como engenharias, física e química. O fenômeno de irrigação em solos não-saturados é uma aplicação relevante deste tipo de escoamento, tendo um papel fundamental na qualidade da produção agrícola e industrial. A modelagem matemática associada envolve a resolução da equação de Richards, que é uma equação diferencial parcial não-linear [3]. Em adição, tal equação depende de funções não-lineares, exigindo, portanto, tratamento computacional para obtenção de uma solução aproximada. Existem diversas técnicas para abordar o problema, como o método dos elementos finitos (MEF) e das diferenças finitas (MDF) [1]. O modelo a ser resolvido é dado por

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \right] = 0, \quad (1)$$

$$h(L, t) = h_t \quad \text{e} \quad h(0, t) = h_f$$

$$h(z, 0) = h_0$$

onde h_0 é a condição inicial (ou nível de saturação no solo); h_f e h_t são as condições de contorno no fundo e no topo da coluna de solo de comprimento L , respectivamente. Ainda, o modelo de condutividade hidráulica de [2], imprescindível para a resolução de (1), é

$$\theta(h) = \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{\alpha + |h|^\beta} + \theta_r \quad \text{e} \quad K(h) = K_s \frac{A}{A + |h|^\gamma}, \quad (2)$$

onde α , β , γ , A são constantes empíricas; K_s é a condutividade hidráulica de saturação do solo; θ_s e θ_r são os conteúdos de água na saturação e em solo seco, respectivamente.

O objetivo deste trabalho é realizar uma simulação numérica para descrever o escoamento transiente unidimensional de água em solo não-saturado, utilizando o método das diferenças finitas (MDF) para encontrar uma solução para (1), usando dados de [2], a saber, $\alpha = 1,611 \cdot 10^6$, $\theta_s = 0,287$, $\theta_r = 0,075$, $\beta = 3,96$, $K_s = 0,00944$ cm/s, $A = 1,175 \cdot 10^6$ e $\gamma = 4,74$. Considerou-se uma coluna de solo de 40 cm de profundidade, com níveis de saturação $h_0 = -61,5$ e -200 cm, condições de contorno $h_t = -20,7$ cm e $h_f = h_0$, passo de tempo $\Delta t = 1$ s e espaçamento de malha $\Delta z = 1$ cm. O tempo de simulação foi de 360 segundos. Como critério de parada, adotou-se uma tolerância de 10^{-8} para as soluções geradas, ou um número máximo de iterações (200) para a análise do decaimento do erro para o primeiro passo de tempo físico. Também, o erro foi calculado considerando-se o máximo entre as normas infinitas do resíduo e da carga hidráulica em relação à iteração anterior. Como aproximação no tempo, foi adotado o método de Euler implícito, e como técnica de linearização das equações discretizadas, os métodos de Picard e de Newton-Raphson foram utilizados.

¹mariomoura@ufrj.br²rsteixeira@ufrj.br³wilianj@coc.ufrj.br

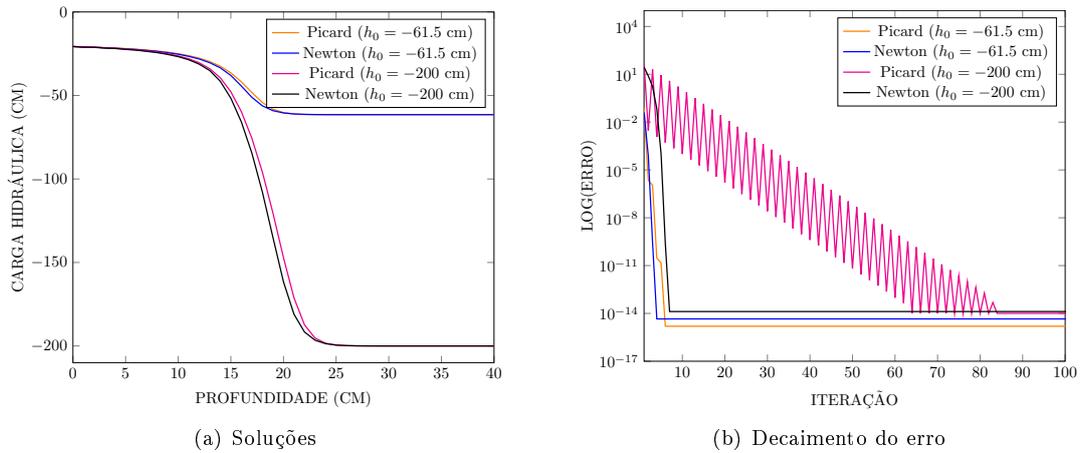


Figura 1: Resultados das simulações. Fonte: autores.

De acordo com a Figura 1, as soluções vindas dos dois esquemas foram geradas com sucesso para ambos os níveis de saturação trabalhados. Em termos do decaimento do erro para o primeiro passo de tempo, o esquema iterativo de Picard aplicado ao solo com menor nível de saturação apresentou dificuldades em lidar com o gradiente de umidade no início da infiltração, haja vista que foram necessárias 85 iterações para estabilização do erro a nível de precisão de máquina. Em contrapartida, o esquema iterativo de Newton-Raphson apresentou ótimas taxas de convergência, requerendo menos de 10 iterações para estabilização do erro, para todos os níveis de saturação trabalhados. Em adição, a solução mais precisa foi obtida pelo esquema de Picard com maior nível de saturação de solo. Também, foi evidenciado que as taxas de convergência para passos de tempo subsequentes são maiores do que aquelas atreladas ao início do processo de infiltração.

Portanto, os resultados parciais obtidos evidenciam a viabilidade dos esquemas implícitos de Picard e Newton-Raphson em trabalhar com diferentes níveis de saturação no solo para o conjunto de parâmetros considerados.

Agradecimentos (opcional)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior — Brasil (CAPES) — Código de Financiamento 001.

Referências

- [1] M. A. Celia, E. T. Boulotas e R. L. Zarba. “A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation”. Em: **Water resources research** 26.7 (1990), pp. 1483–1496.
- [2] R. Haverkamp et al. “A comparison of numerical simulation models for one-dimensional infiltration”. Em: **Soil Sic. Soc. Am. J.** 41 (1977).
- [3] F. List e F.A. Radu. “A study on iterative methods for solving Richards’ Equation”. Em: **Computational Geosciences** 20.2 (2016), pp. 341–353.