Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

# Solução fraca de uma Equação Diferencial Parcial Elíptica via minimização

Willian V. Felipe,
FCT-Unesp, Presidente Prudente, SP

## 1 Introdução

As Equações Diferenciais Parciais são uma das mais poderosas ferramentas matemáticas para a modelagem de fenômenos físicos, químicos, biológicos e sociais. Dentre essas, as do tipo elípticos se destacam por descreverem estados estacionários de fenômenos de evolução associados a equações parabólicas e hiperbólicas. Entre os métodos modernos para resolução de EDPs elípticas, se destacam os métodos variacionais, os quais consistem em associar às soluções fracas dos pontos críticos de funcionais definidos em espaços de Banach adequados. Tal estudo consiste em assuntos relacionados à Análise Funcional, Teoria da Medida e Espaços de Sobolev.

## 2 Objetivo

Neste trabalho, aplicaremos os métodos variacionais para a resolução de um problema elíptico com crescimento sublinear, através de uma solução fraca, utilizando os Espaços de Sobolev e seus teoremas de imersão.

## 3 Desenvolvimento

Através dos **Espaços de Sobolev** e suas consequências de imersões contínuas e compactas nos espaços $L^p$'$s$, podemos garantir que sequência limitada $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$, possui pelo menos uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \in H_0^1(\Omega) \text{ e } u_{n_j} \to u \in L^s(\Omega), \text{ para todo } s \in (1, 2^*), \text{ onde } 2^* = \frac{2N}{N-2}.$$

Conseguimos demonstrar que o funcional energia abaixo

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u), \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

em que

$$I'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega f(x,u)v, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

é fracamente semícontínuo inferiormente.

Com o objetivo de definir solução fraca, vamos considerar o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) &= f(x,u(x)) \quad , \text{ em } \Omega \\ u(x) &= 0 \quad , \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$


© 2022 SBMAC

**Definição 3.1.** *Uma **solução fraca** de* (P) *é uma função* $u \in H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x) = \int_\Omega f(x,u(x))v(x), \tag{1}$$

*para todo* $v \in H_0^1(\Omega)$.

Então é possivel perceber que os pontos críticos do funcional $I$ correspondem a solução fraca do problema.

# 4 Resultados

Seja $I$ o funcional energia associado a (P), ou seja

$$\begin{aligned} I : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{q}\int_\Omega F(x,u)\,dx \end{aligned}$$

onde

$$I'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx - \int_\Omega f(x,u)v\,dx.$$

**Teorema 4.1.** *Seja* $E$ *um Espaço de Hilbert (ou de Banach reflexivo) e* $\phi : E \to \mathbb{R}$ *um funcional tal que:*

1. $\phi$ *é fracamente semicontínuo inferiormente,*

2. $\phi$ *é coercivo, ou seja,* $\phi(u) \to +\infty$ *quando* $||u|| \to +\infty$.

*Então* $\phi$ *é limitado inferiormente e existe* $u_0 \in E$ *tal que*

$$\phi(u_0) = \inf_E \phi.$$

**Teorema 4.2.** *Se* $f(x,t) = |t|^{q-2}t$*, onde* $1 < q < 2$*, então o problema* (P) *possui uma solução fraca não-trivial.*

Com a aplicação do resultado abstrato enunciado no Teorema 4.1, obtemos a existência de uma solução fraca não-trivial para um problema sublinear elíptico ( Teorema 4.2).

# 5 Conclusão

Nesse trabalho, utilizamos técnicas analíticas para a obtenção de uma solução fraca não-trivial para um problema sublinear elíptico. Tais métodos são interessantes pois são passiveis de serem aplicados a situações mais gerais, onde podem ser estudados outros operadores elípticos.



© 2022 SBMAC

## Referências

[1] Figueiredo, G. M. *Uma introdução à teoria dos pontos críticos*, Notas de aula (2016).

[2] Ambrosetti, A., Malchiodi, A. *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, Cambridge, Nova Iorque (2007).

[3] Brézis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, Universitext (2011).

[4] Alves, C. O. *Uma introdução às equações elípticas*, Notas de aula (2007).



© 2022 SBMAC