Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Estudo comparativo de técnicas de pós-processamento para recuperação de tensão no problema de elasticidade linear

Alisson S. Pinto[1] Cristiane O. de Faria[2]
IME/UERJ, Rio de Janeiro, RJ
Giovanni Taraschi[3] Maicon R. Correa[4]
IMECC/Unicamp, Campinas, SP

1 Introdução

Seja $\Omega \in \mathbb{R}^2$ um domínio aberto e limitado, com contorno $\Gamma = \partial\Omega$, sujeito à força externa $\mathbf{f}$ regular. O problema de elasticidade linear bidimensional consiste em encontrar um vetor deslocamento $\mathbf{u}$ e o tensor de tensões de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$, satisfazendo

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad \text{em } \Omega \qquad \mathbb{A}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad \text{em } \Omega, \qquad \mathbf{u} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega, \tag{1}$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ é o tensor de deformação simétrico e $\mathbb{A} = \mathbb{C}^{-1}$ é o inverso do tensor de elasticidade $\mathbb{C}$.

Métodos de elementos finitos para o problema de elasticidade linear considerando como variáveis $\mathbf{u}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ seguem, basicamente, duas estratégias. Na primeira, inicialmente se determina a aproximação do campo de deslocamento a partir de uma formulação primal, com a posterior avaliação da tensão através de uma técnica de pós-processamento. Já na segunda estratégia, ambas variáveis são encontradas simultaneamente, pelos chamados Métodos Mistos (MM), que demandam a definição de espaços de elementos finitos compatíveis para a tensão e o deslocamento. Tal definição pode ser não-trivial, o que normalmente justifica a preferência pela primeira estratégia, uma vez que ela permite o emprego de aproximações independentes para as variáveis.

2 Técnicas de pós-processamento

Para este trabalho serão analisadas duas diferentes técnicas de pós-processamento para a tensão, usando como base o campo de deslocamentos calculado pelo método primal híbrido estabilizado de Galerkin descontínuo (SHDG) proposto em [1], que possui taxas ótimas para o deslocamento em $L^2(\Omega)$. No método SHDG o multiplicador de Lagrange ($\boldsymbol{\lambda}$) é definido como sendo o traço do deslocamento em cada aresta dos elementos. Baseado em ideias encontradas em métodos de Galerkin descontínuo, um termo que deixa a formulação simétrica é adicionado e a condição de fronteira é fracamente imposta seguindo a aproximação de Nitsche. Tal formulação também emprega dois termos de estabilização para a continuidade do deslocamento nas arestas. O multiplicador de Lagrange é então obtido pela resolução de um sistema global, enquanto o deslocamento é recuperado localmente, a nível do elemento. Os métodos escolhidos para recuperação da tensão são

[1]alisson.pinto@pos.ime.uerj.br
[2]cofaria@ime.uerj.br
[3]gitaraschi@gmail.com
[4]maicon@ime.unicamp.br

(i) A estratégia de pós-processamento local originalmente proposta em [1], sendo a forma natural de avaliação do campo de tensões para o método SHDG, à qual chamaremos de *Pós-Processamento SHDG* (PPSHDG). Nesta estratégia, a formulação é construída a partir do problema (1) avaliado localmente (a nível de elemento) e as condições de contorno são dadas pelo multiplicador de Lagrange calculado pelo método SHDG. Além disso, termos residuais de estabilização vindos da equação constitutiva, da equação de conservação e da condição de continuidade do multiplicador de Lagrange são adicionados à formulação. Segundo [1], taxas ótimas de convergência $\mathcal{O}(h^k)$ na norma $H(\text{div}, \Omega)$ são encontradas, para escolhas adequadas dos parâmetros de estabilização.

(ii) A estratégia de pós-processamento global de [2], segundo sua adaptação para o problema de elasticidade linear proposta em [3], sendo aqui chamada de *Pós-Processamento Global* (PPG), uma vez que requer a resolução de um novo problema global, envolvendo o campo de tensões em todo o domínio Ω. Esta técnica foi construída a partir da combinação de resíduos de quadrados mínimos da equação constitutiva e da equação de balanço. Para escolhas adequadas dos parâmetros de estabilização, taxas ótimas de ordem de convergência $\mathcal{O}(h^{k+1/2})$ e $\mathcal{O}(h^k)$ foram demonstradas por [2] para a tensão nas normas $L^2(\Omega)$ e $H(\text{div}, \Omega)$, respectivamente.

A fim de analisar e comparar as estratégias de pós-processamento, experimentos para o caso compressível foram realizados considerando um domínio quadrado unitário, com condições de contorno homogêneas em malhas de elementos quadrangulares, utilizando funções de interpolação lagrangeanas de ordem igual a 1 para todas as variáveis e o multiplicador de Lagrange. Os resultados alcançados estão de acordo com as análises apresentadas em [1] e [2]. As taxas de convergência$-h$ na norma $L^2(\Omega)$ e na norma $H(\text{div}, \Omega)$ encontradas, para ambos métodos, confirmam os valores ótimos esperados teoricamente.

Em trabalhos futuros, motivados pelos resultados obtidos neste estudo, serão avaliadas questões relacionadas quando é considerado materiais não-homogêneos, e também condições de contorno não-homogêneas.

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq através dos processos 304192/2019-8 e 140400/2021-4; da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP pelo processo 2013/07375-0; da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

[1] C. O. Faria, A. F. D. Loula e A. J. B. dos Santos. “Primal stabilized hybrid and DG finite element methods for the linear elasticity problem”. Em: **Computers & Mathematics with Applications** 68.4 (2014), pp. 486–507.

[2] A. F. D. Loula, F. A Rochinha e M. A. Murad. “Higher-order gradient post-processings for second-order elliptic problems”. Em: **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** 128.3-4 (1995), pp. 361–381. DOI: 10.1016/0045-7825(95)00885-3.

[3] G. Taraschi, A. S. Pinto, C. O. Faria e M. R. Correa. “On the accuracy of finite element approximations of elliptic problems with heterogeneous coefficients”. Em: **Proceedings of the Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering** (2021).