Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

O método do gradiente para minimizar o Quociente de Rayleigh

Breno Vieira Sousa[1], Márcio Antônio de Andrade Bortoloti[2], Teles Araújo Fernandes[3]
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, BA

O problema de determinar autovalor de matriz tem importantes aplicações. Por exemplo, o sistema de pesquisa da Google, [3], onde é utilizado um algoritmo de classificação, denominado *Page Rank*, que obtém uma classificação de pesquisas através do cálculo de autovalor da chamada matriz Google. Também podemos associar o cálculo de autovalores a problemas de processamento de sinais, veja [4]. É bem conhecido que toda matriz simétrica possui pelo menos um autovalor real, veja [5, Cap. 13, pag. 160]. Além disso, o valor mínimo da função Quociente de Rayleigh (QR), é o menor autovalor da matriz simétrica que define essa função, [1, Cap. 2, Prop. 2.1.2]. A função Quociente de Rayleigh é formalmente descrita por $f : \mathbb{R}^n_* \to \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = \frac{x^T A x}{x^T x}, \tag{1}$$

onde $(\cdot)^T$ denota a matriz transposta, A é uma matriz simétrica de ordem $n \times n$ e $\mathbb{R}^n_*$ é o espaço n-dimensional sem a origem. Por outro lado, considerando $\mathbb{S}^{n-1}$ a esfera n-dimensional podemos definir a função Quociente de Rayleigh dada em (1) assumindo $g : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$, tal que

$$g(x) = x^T A x. \tag{2}$$

Neste trabalho, a fim de minimizar (1), isto é, determinar o menor autovalor da matriz A, estudamos o método do gradiente em contexto Euclidiano (GE). Apresentamos um estudo numérico comparando a eficiência do GE equipado com as métricas euclidiana, da soma e do máximo. Além disso, também apresentamos um estudo do método do gradiente em contexto Riemanniano (GR) para minimizar (2), comparando as duas estratégias GE e GR. Finalmente, desenvolvemos um estudo numérico comparando o desempenho computacional do Algoritmo 2, por atualizar as iteradas com duas estrategias distintas, isto é, utilizando duas retrações.

O que segue descreve formalmente o método do gradiente Euclidiano.

Algoritmo 1: Método do gradiente Euclidiano (GE)

1 Tome um ponto inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in (0,1)$, $\epsilon > 0$ e faça $k := 0$.

2 $d_k := -\nabla f(x_k) = \dfrac{-2(A - f(x_k)I)x_k}{(x_k^T x_k)}$.

3 Se $||d_k||_E > \epsilon$ faça

$$\alpha_k := \max\left\{2^{-j} : f(x_k + 2^{-j} d_k) \leq f(x_k) - \eta 2^{-j} \|d_k\|_E^2,\ j \in \mathbb{N}\right\}. \tag{3}$$

4 $x_{k+1} := x_k + \alpha_k d_k$.

5 $k \leftarrow k + 1$ e retome para o **passo** 2.

[1]3vieirabreno@gmail.com
[2]mbortoloti@uesb.edu.br
[3]telesfernandes@uesb.edu.br

No Algoritmo 1, o **passo** 2 apresenta a direção de descida do gradiente da função QR. Além disso, no **passo** 3, $\|d_k\|_E$ denota a norma euclidiana ou a norma do máximo ou a norma da soma.

Por sua vez, o método do gradiente Riemanniano é apresentado como segue:

Algoritmo 2: Método do gradiente Riemanniano (GR)

1 Tome um ponto inicial $x_0 \in \mathbb{S}^n$, $\eta \in (0,1)$, $\epsilon > 0$ uma retração R e faça $k := 0$.
2 $d_k := -\text{grad}\, f(x_k) = 2[x_k x_k^T - I]Ax_k$.
3 Se $\|d_k\|_R > \epsilon$ faça

$$\alpha_k := \max\left\{2^{-j} : f\left(R_{x_k}(2^{-j}v_k)\right) \leq f(x_k) - \eta 2^{-j}\|d_k\|_R^2,\ j \in \mathbb{N}\right\}. \tag{4}$$

4 $x_{k+1} := R_{x_k}(\alpha_k v_k)$.
5 $k \leftarrow k+1$ e retome para o **passo** 2.

Agora, apresentamos alguns comentários do Algoritmo 2. No **passo** 2, temos a direção de descida do gradiente Riemanniano da função Quociente de Rayleigh definida em (2). No **passo** 3, a métrica $\|\cdot\|_R$ é a métrica induzida do $\mathbb{R}^n$ e α_k é dado pela busca de Armijo em contexto Riemanniano. Por fim, denotando $T_x\mathbb{S}^{n-1}$ como o espaço tangente de $\mathbb{S}^{n-1}$ no ponto x, no **passo** 4 as estrategias de atualização das iteradas são dadas pelas seguintes retrações na esfera, veja [2],

$$R_x(v) = cos(\|v\|_R)x + \frac{sen(\|v\|_R)}{\|v\|_R}v, \quad R_x(v) = \frac{x+v}{\|x+v\|_R}, \quad \forall x \in \mathbb{S}^{n-1} e\ v \in T_x\mathbb{S}^{n-1}. \tag{5}$$

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer ao professor Alfredo Noel Iusem (**IMPA**) que, por meio da FAPERJ, nos deu apoio financeiro na hospedagem. A **UESB**, agradecemos pelo apoio financeiro no transporte. Finalmente, agradecemos ao **Programa de Iniciação Cíentifica - PIC/UESB**, o qual nos possibilitou desenvolver este trabalho.

Referências

[1] P. A. Absil, R. Mahony e R. Sepulchre. **Optimization algorithms on matrix manifolds**. Princeton University Press, 2009.

[2] M. A. A. Bortoloti, T. A. Fernandes e O. P. Ferreira. "An efficient damped Newton-type algorithm with globalization strategy on Riemannian manifolds". Em: **Journal of Computational and Applied Mathematics** 403 (2022), p. 113853.

[3] K. Bryan e T. Leise. "The $25,000,000,000 eigenvector: The Linear Algebra behind Google". Em: **SIAM review** 48.3 (2006), pp. 569–581.

[4] P. Comon e G. H. Golub. "Tracking a few extreme singular values and vectors in signal processing". Em: **Proceedings of the IEEE** 78.8 (1990), pp. 1327–1343.

[5] E. L. Lima. **Álgebra Linear: Coleção Matemática Universitária**. 1a. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. ISBN: 9788524403903.

