

Análise de Mecanismos de Controle populacional via Transformadas Integrais Generalizadas

Maiquison S. Friguis¹

IFF, Cabo Frio, RJ

Diego C. Knupp², Antônio José da S. Neto³

IPRJ/UERJ, Nova Friburgo, RJ

Resumo. Ecossistemas são estruturas complexas e ao mesmo tempo muito frágeis a ações externas. Quando a ação humana não é bem planejada e executada pode provocar desequilíbrio ambiental que muitas vezes leva a explosão de populações que podem atuar como vetores de doenças. Objetivando o controle dessas populações modelar mecanismos de controle populacional tem grande relevância para implementação de políticas públicas de combate e prevenção de doenças transmitidas por vetores. Neste trabalho a remoção por armadilhas locais e a predação são considerados como mecanismos de controle populacional, sendo modelados por um sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem em um domínio bidimensional com solução formulada e obtida através do formalismo da Técnica de Transformadas Integrais Generalizadas.

Palavras-chave. Presa-Predador, Populações Difusivas, Transformada Integral

1 Introdução

Um ecossistema é uma estrutura complexa que além de envolver componentes físico-químicos como ar, água e solo também lida com seres vivos como plantas e animais, considerando escalas macro e microscópicas, e por se tratar de uma rede complexa de interações, tem equilíbrio muito frágil podendo ser facilmente alterado pela mais variadas atividades humanas. Situações de desequilíbrio ambiental tendem a levar a explosão demográfica de espécies, que antes viviam em perfeita harmonia com o meio ambiente, a atuarem como vetores de doenças como Dengue, Chikungunya, Febre Zika, Febre Amarela entre outras [1]. Buscando diminuir os efeitos de explosões demográficas indevidas, considerando principalmente de vetores de doenças, muitas vezes pode ser empregado o uso de mecanismos de controle para redução ou até mesmo extermínio completo dessas populações. Dessa forma, entender como se dá a dinâmica de populações na presença de mecanismos de controle pode ser de grande ajuda na implementação de políticas públicas de combate a vetores de doenças.

Considerando a modelagem de mecanismos de controle podem-se destacar as armadilhas locais [2] e efeitos de competição interespecífica do tipo presa-predador [3]. Nesse trabalho é apresentado um modelo de dinâmica populacional bidimensional do tipo presa-predador com locais de abate em pontos discretos do domínio que afetam apenas a população de presas. Para solução do sistema difusivo envolvido é desenvolvida uma solução híbrida utilizando a Técnica de Transformadas Integrais Generalizadas (GITT) [4].

¹maiquison@hotmail.com

²diegoknupp@iprj.uerj.br

³ajsneto@iprj.uerj.br

2 Formulação e Solução do Problema

Considere uma população de presas u e uma população de predadores v com competição inter-específica definidas em um domínio $V = [0, L_1] \times [0, L_2]$ com superfície de contorno S , dispersão governada pela lei de Fick e locais de abate com intensidade constante que afetam apenas a população de presas. Considerando o modelo descrito por [5], tem-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \nabla \cdot (\nabla u) + R_0 u \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{Euv}{F+u} - d(\mathbf{x}, t, u), & \mathbf{x} \in V, \quad t > 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \nabla \cdot (\nabla v) + S_0 v \left(1 - Q \frac{v}{u}\right), & \mathbf{x} \in V, \quad t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

onde:

- D_u e D_v são, respectivamente, os coeficientes de difusão de presas e predadores.
- R_0 e S_0 são as taxas de crescimento intrínseco de presas e predadores, respectivamente.
- E é a taxa máxima de consumo por cada predador, ou seja, o número máximo de presas que podem ser consumidas por um único predador em cada instante t .
- F é o número de presas necessárias para atingir metade da taxa máxima E .
- Q é uma medida da qualidade do alimento que a presa fornece para a conversão em nascimentos de predadores.
- K é a capacidade de carga ambiental das presas i.e. a quantidade máxima de recursos que a presa pode retirar do ambiente [6].
- $d(\cdot)$ é uma função que modela o abate.

Note que, embora o crescimento da população de predadores seja do tipo logístico sua capacidade de carga ambiental é substituída por uma capacidade proporcional à abundância de presas $\frac{1}{Q}u$. As condições de contorno e iniciais são:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in S, \quad t > 0 \quad (2)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad v(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}) \quad (3)$$

Considerando o formalismo da GITT utiliza-se as versões homogêneas lineares para cada uma das populações e escolhe-se o problema de autovalor mais adequado. Assim, considerando auto-funções bidimensionais com seus respectivos autovalores reordenados pode-se escrever os pares de transformação:

$$\text{Transformada :} \quad \bar{u}_i(t) = \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \tilde{\psi}_i(x, y) u(x, y, t) dx dy \quad (4)$$

$$\text{Inversa :} \quad u(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(x, y) \bar{u}_i(t)$$

para a população de presas, e:

Transformada :
$$\bar{v}_i(t) = \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \tilde{\phi}_i(x, y)v(x, y, t)dxdy$$
 (5)

Inversa :
$$v(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\phi}_i(x, y)\bar{v}_i(t)$$

para a população de predadores. Que em conjunto com os operadores

$$\int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \psi_i(x, y) (\cdot) dxdy \text{ e } \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \phi_i(x, y) (\cdot) dxdy$$
 (6)

transformam o problema original em:

$$\frac{d\bar{u}_i(t)}{dt} + \lambda_i^2 \bar{u}_i(t) = \bar{G}_i(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$$
 (7a)

$$\frac{d\bar{v}_i(t)}{dt} + \omega_i^2 \bar{v}_i(t) = \bar{H}_i(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$$
 (7b)

onde λ_i e ω_i são autovalores de $\tilde{\psi}_i(x, y)$ e $\tilde{\phi}_i(x, y)$, respectivamente e:

$$\bar{\mathbf{u}} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_N\} \text{ e } \bar{\mathbf{v}} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_N\}$$
 (8)

com os termos fonte transformados dados por:

$$\begin{aligned} \bar{G}_i(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) &= \bar{G}_{i,1}(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) + \bar{G}_{i,2}(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) + \bar{G}_{i,3}(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \\ \bar{H}_i(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) &= \bar{H}_{i,1}(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \end{aligned}$$
 (9)

com:

$$\bar{G}_{i,1} = \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \tilde{\psi}_i(x, y)R_0 \sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t)\tilde{\psi}_j(x, y) \left(1 - \frac{1}{K} \sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t)\tilde{\psi}_j(x, y)\right) dxdy$$
 (10)

$$\bar{G}_{i,2} = - \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \tilde{\psi}_i(x, y) \left(\frac{E \sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t)\tilde{\psi}_j(x, y) \sum_{j=1}^N \bar{v}_j(t)\tilde{\phi}_j(x, y)}{F + \sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t)\tilde{\psi}_j(x, y)}\right) dxdy$$
 (11)

$$\bar{G}_{i,3} = - \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \tilde{\psi}_i(x, y)d(x, y, t, u)dxdy$$
 (12)

$$\bar{H}_{i,1} = \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \tilde{\phi}_i(x, y)S_0 \sum_{j=1}^N \bar{v}_j(t)\tilde{\phi}_j(x, y) \left(1 - \frac{Q \sum_{j=1}^N \bar{v}_j(t)\tilde{\phi}_j(x, y)}{\sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t)\tilde{\psi}_j(x, y)}\right) dxdy$$
 (13)

O sistema acima, formado pelas Equações (10-13), fica acoplado e para fins computacionais o sistema de EDO's pode ser truncado em uma ordem suficientemente grande para a precisão requerida, e numericamente resolvido para os potenciais transformados $\bar{u}_i(t)$ e $\bar{v}_i(t)$, para $i = 1, \dots, N$. O sistema infinito acoplado obtido é truncado em uma ordem N e solucionado numericamente através da rotina *NDSolve* do software Mathematica. Buscando reduzir o custo computacional da solução bidimensional via GITT foi introduzido um modelo de baixa ordem [7].

3 Resultados

Considerando quatro armadilhas com intensidade constante B com centros (x_j, y_j) posicionadas conforme Tabela 1.

Tabela 1: Centro dos Locais de Abate.

Posição	x	y
P1	0,3	0,3
P2	0,3	0,7
P3	0,7	0,3
P4	0,7	0,7

as quais foram modeladas considerando a função:

$$d(x, y, t, u) = \sum_{j=1}^{N_{cs}} B_j u(x_j, y_j, t) f(x, y) \tag{14}$$

onde

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi\sigma} \exp\left(-\left(\frac{(x-x_j)^2}{\sigma} + \frac{(y-y_j)^2}{\sigma}\right)\right) \tag{15}$$

com $\sigma = 0,006$.

Considerando a estabilidade apresentada em [8] foram adotados os parâmetros para solução do problema direto envolvendo o modelo de duas populações conforme Tabela 2.

Tabela 2: Valores utilizados para solução do problema direto com duas populações.

D_u	D_v	R_0	K	E	F	S_0	Q	B
0,001	0,0001	0,01	1	0,005	1	0,001	0,1	0,001

Para verificar a eficiência da GITT na solução do problema dado pelas Eqs.(1-3), analisou-se a convergência da solução com respeito a ordem de truncamento N considerando o modelo completo e o modelo aproximado. Nas Tabelas 3 e 4 são apresentadas as convergências das densidades populacionais de presas e predadores onde pode-se observar que a ausência de abate para a população de predadores faz com que a solução tenha uma precisão de três casas decimais quando comparada a menor e maior ordem de truncamento. Por outro lado para a população de presas a solução tem um desempenho inferior visto que apenas consegue uma precisão de duas casas decimais.

Tabela 3: Convergência da solução modelo completo com $y = 0,2$ e $t = 50$.

N	$u(x, y, t)$			$v(x, y, t)$		
	$x = 0,2$	$x = 0,4$	$x = 0,5$	$x = 0,2$	$x = 0,4$	$x = 0,5$
30	0,7596	0,7374	0,7431	1,0450	1,0449	1,0449
50	0,7696	0,7467	0,7707	1,0451	1,0450	1,0451
70	0,7673	0,7478	0,7678	1,0451	1,0450	1,0451
90	0,7674	0,7480	0,7676	1,0451	1,0450	1,0451
130	0,7580	0,7356	0,7416	1,0450	1,0449	1,0449

Tabela 4: Convergência da solução modelo completo com $y = 0,2$ e $t = 500$.

N	$u(x, y, t)$			$v(x, y, t)$		
	$x = 0,2$	$x = 0,4$	$x = 0,5$	$x = 0,2$	$x = 0,4$	$x = 0,5$
30	0,2567	0,2462	0,2476	1,4202	1,4148	1,4144
50	0,2643	0,2535	0,2613	1,4229	1,4177	1,4179
70	0,2638	0,2541	0,2605	1,4229	1,4179	1,4180
90	0,2638	0,2542	0,2605	1,4230	1,4179	1,4180
130	0,2544	0,2439	0,2455	1,4191	1,4136	1,4132

Por outro lado, para a convergência utilizando o modelo aproximado, pode-se observar nas Tabelas 5 e 6 que quando comparado ao modelo completo tem-se uma precisão reduzida para apenas uma casa decimal, porém como observa-se na Tabela 7, a redução do custo computacional, em segundos, foi superior a 97% mostrando que a solução aproximada é viável sacrificando parte da precisão.

Tabela 5: Convergência da solução modelo aproximado com $y = 0,2$ e $t = 50$.

N	$u(x, y, t)$			$v(x, y, t)$		
	$x = 0,2$	$x = 0,4$	$x = 0,5$	$x = 0,2$	$x = 0,4$	$x = 0,5$
50	0,7622	0,7307	0,7589	1,0451	1,0451	1,0451
90	0,7616	0,7352	0,7545	1,0451	1,0451	1,0451
150	0,7620	0,7360	0,7523	1,0451	1,0451	1,0451
200	0,7621	0,7357	0,7529	1,0451	1,0451	1,0451
Completo	0,7580	0,7356	0,7416	1,0450	1,0449	1,0449

Tabela 6: Convergência da solução modelo aproximado com $y = 0,2$ e $t = 500$.

N	$u(x, y, t)$			$v(x, y, t)$		
	$x = 0,2$	$x = 0,4$	$x = 0,5$	$x = 0,2$	$x = 0,4$	$x = 0,5$
50	0,2373	0,2257	0,2340	1,4070	1,4070	1,4070
90	0,2372	0,2271	0,2326	1,4070	1,4070	1,4070
150	0,2373	0,2273	0,2319	1,4070	1,4070	1,4070
200	0,2373	0,2272	0,2321	1,4070	1,4070	1,4070
Completo	0,2544	0,2439	0,2455	1,4191	1,4136	1,4132

Tabela 7: Tempo Computacional da solução.

N	Aproximado (s)	Completo (s)
30	1,09	46,95
50	2,38	190,50
70	4,67	464,05
90	5,09	985,75

Para comparar os efeitos que a predação exerce sobre a solução do problema descrito pelas Eqs.(1-3), pode-se fazer $E = F = 0$ para desprezar os efeitos da competição na população de presas.

Na Figura 1 é exibido o comportamento transiente da densidade de presas, com e sem predação. Note que a predação é responsável por uma redução, em média, de aproximadamente 11% da população de presas quando comparara-se o comportamento em relação ao tempo. Por outro lado, considerando o comportamento longitudinal com $y = 0,2$ tem-se uma redução percentual, em média, de 0,24% para $t = 50$, 62% para $t = 250$ e 159% para $t = 500$ (veja Figura 2).

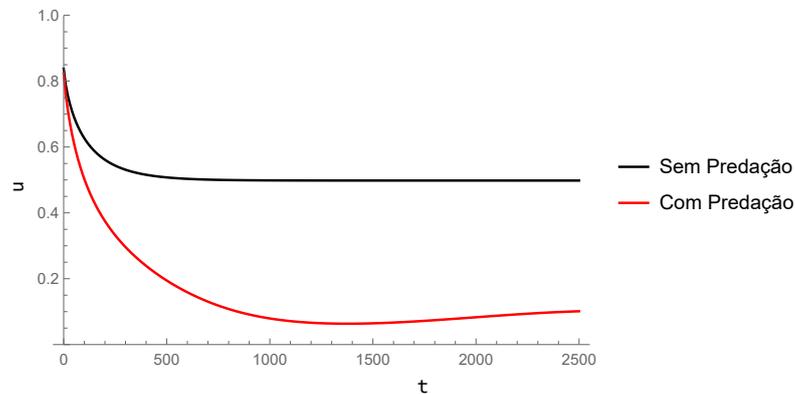


Figura 1: Comportamento transiente da densidade de presas. Fonte: O autor.

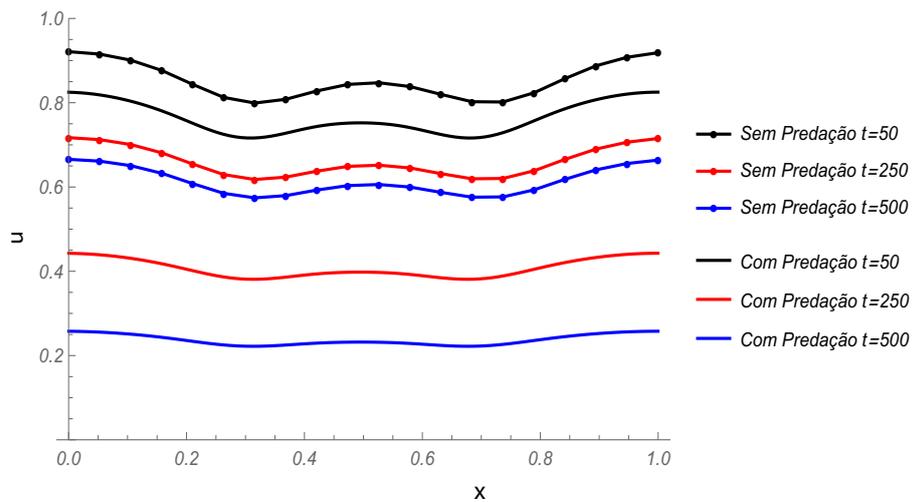


Figura 2: Comportamento longitudinal da densidade de presas. Fonte: O autor.

4 Considerações Finais

O desequilíbrio ambiental pode ser uma fonte imensa de problemas e um deles é o crescimento desordenado de populações que podem atuar como vetores de doenças. Objetivando estudar o comportamento de competição e remoção por armadilhas foi utilizado um modelo bidimensional difusivo do tipo presa-predador e por conta da não linearidade proveniente desse tipo de modelo foi

implementada uma solução via Transformadas Integrais Generalizadas, onde pode-se observar que a predação funciona como um bom mecanismo de controle populacional fornecendo uma redução considerável na densidade de presas. Ainda, considerando a solução proposta foi implementada uma solução aproximada com custo computacional baixo quando comparado a solução considerada completa, possibilitando que futuramente seja abordadas rotinas que necessitam de grande número de avaliações de uma função objetivo baseada na solução deste problema.

Agradecimentos (opcional)

Os autores agradecem o apoio financeiro do Instituto Federal Fluminense, da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Código de Financiamento 001).

Referências

- [1] L. A. da Silva et al. “a influência do desequilíbrio ambiental sobre as doenças transmitidas por *Aedes aegypti*”. Em: **Educação Ambiental em ação** 17.66 (2018).
- [2] R.R.L Simons e S. A Gourley. “Extinction criteria in stage-structured population models with impulsive culling”. Em: **SIAM Journal on Applied Mathematics** 66.6 (2006), pp. 1853–1870.
- [3] C. Wang e S. Qi. “Spatial dynamics of a predator-prey system with cross diffusion”. Em: **Chaos, Solitons & Fractals** 107 (2018), pp. 55–60.
- [4] R. M. Cotta. **Integral transforms in computational heat and fluid flow**. CRC Press, 2020.
- [5] R. M. May. “Qualitative stability in model ecosystems”. Em: **Ecology** 54.3 (1973), pp. 638–641.
- [6] N. Bacaër. “Verhulst and the logistic equation (1838)”. Em: **A short history of mathematical population dynamics**. Springer, 2011, pp. 35–39.
- [7] M. S. Friguis et al. “Inverse Population Dynamics Problem Employing a Low Cost Integral Transform Solution and Bayesian Inference with Approximation Error Model”. Em: **International Journal of Applied and Computational Mathematics** 7.5 (2021), pp. 1–25.
- [8] S. Hsu e T. Huang. “Global stability for a class of predator-prey systems”. Em: **SIAM Journal on Applied Mathematics** 55.3 (1995), pp. 763–783.