

# Usando o Google Earth para reavaliar distâncias e áreas na solução de problemas geométricos

Rudimar Luiz Nós<sup>1</sup>

UTFPR, Curitiba, PR

Fábio Jardim de Almeida<sup>2</sup>

Escola Logus, Curitiba, PR

**Resumo.** Reavaliamos neste trabalho a solução de problemas geométricos empregando o Google Earth. Segundo as etapas da solução de um problema estabelecidas por George Pólya, a fase de retrospecto possibilita o aperfeiçoamento da capacidade de resolver problemas assim como a consolidação de conhecimentos. Nesse processo, selecionamos dois problemas geométricos onde a análise da solução possibilita extrapolar conceitos euclidianos e introduzir noções de geometria esférica. Concluímos que o emprego de tecnologias digitais, como o Google Earth, é importante na verificação da solução dos problemas geométricos selecionados, estando em consonância com o que estabelece a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sobre o uso dessas tecnologias no ensino de matemática.

**Palavras-chave.** Geometria Esférica, GPS, ENEM, BNCC, Ensino de Matemática.

## 1 Introdução

A arte de resolver problemas é quase tão antiga quanto a arte de contar. Porém, essa arte exige método. O matemático húngaro George Pólya (1887-1985) estabeleceu, na obra *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático* [16], quatro fases na solução de um problema: a compreensão do problema; o estabelecimento de um plano; a execução do plano; o retrospecto. Esta última fase é caracterizada pela verificação e reavaliação. Pólya enfatiza que o retrospecto é uma fase importante e instrutiva do trabalho de resolução, pois permite aperfeiçoar a compreensão da solução e consolidar conhecimentos.

A Base Nacional Comum Curricular [5] associa, na quinta competência geral, a resolução de problemas ao emprego de tecnologias digitais.

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva ([5], p. 9).

Para o Ensino Fundamental, a BNCC designa em sua quinta competência específica de matemática: “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” ([5], p. 267).

Associando as ideias de Pólya com as competências da BNCC, selecionamos dois problemas geométricos presentes em testes oficiais para reavaliar a solução na fase de retrospecto usando

---

<sup>1</sup>rudimarnos@utfpr.edu.br

<sup>2</sup>doisbara@hotmail.com

tecnologias digitais. O primeiro problema é uma questão do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), enquanto que o segundo é uma questão do exame de seleção do Instituto Federal de Pernambuco (IFPE) para os cursos técnicos integrados PROEJA (Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos).

Os dois problemas selecionados abordam conhecimentos de geometria euclidiana plana. Entretanto, o processo de reavaliação, ou a fase de retrospecto segundo Pólya, possibilita contrapor a solução a partir de conceitos de geometria esférica. Nesse processo, empregamos o Google Earth [8], um aplicativo computacional que renderiza uma representação 3D do planeta Terra com base em imagens de satélite. Apresentamos o mecanismo de funcionamento dessa tecnologia digital antes da análise dos dois problemas geométricos.

## 2 Google Earth

O *Google Earth* é um aplicativo que se conecta aos satélites de localização GPS (*Global Positioning System*), permitindo a geolocalização em tempo real a partir de qualquer ponto da superfície terrestre. Esse *software* usa como referência as coordenadas geográficas dos pontos na superfície terrestre, o que possibilita medir a distância entre dois pontos quaisquer e calcular a área de superfícies.

O GPS é, possivelmente, o exemplo mais cotidiano da aplicação dos conceitos da relatividade [2]. A constelação GPS em torno da Terra é composta por 32 satélites, sendo 24 satélites funcionais com relógios atômicos em seu interior - Figura 1(a): cada satélite pesa quase uma tonelada, mede cerca de 5 m de diâmetro e tem uma vida útil média de 10 anos. Os satélites sobressalentes são acionados em caso de problemas ou falhas técnicas. Qualquer ponto da superfície da Terra pode ser captado por pelo menos quatro satélites.

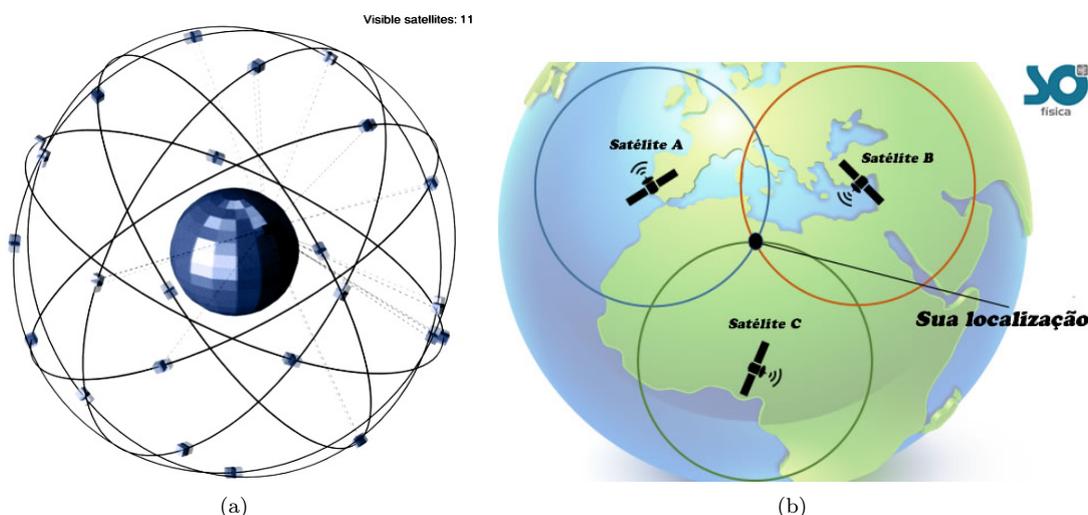


Figura 1: Sistema GPS: (a) sistema de satélites [17]; (b) trilateração [10].

A conexão entre o aparelho receptor e os satélites ocorre através de ondas de rádio eletromagnéticas que se propagam no ar com uma velocidade próxima à velocidade da luz. A localização ocorre em um processo denominado *trilateração*: três satélites definem a posição na superfície terrestre, enquanto que um quarto satélite indica a altitude em que o receptor está em relação ao nível do mar; a intersecção das áreas de abrangência dos três satélites é o ponto no qual está o receptor -

Figura 1(b). Para determinar as distâncias entre o receptor e cada satélite, calcula-se a diferença de tempo entre a emissão e a recepção do sinal enviado pelo satélite e multiplica-se essa diferença pela velocidade da luz.

A relatividade temporal [18] no GPS é sutil: os satélites que varrem a superfície terrestre estão a uma altura de  $20\text{ km}$  e trafegam na atmosfera a uma velocidade média de  $14.000\text{ km/h}$ . A movimentação dos satélites em relação ao tempo tem uma diferença prática de tempo na Terra de aproximadamente  $38\ \mu\text{s}$  (microsegundos,  $1\ \mu\text{s} = 10^{-6}\text{ s}$ ) por dia. Assim, os relógios atômicos dos satélites são programados para atrasar esses mesmos  $38\ \mu\text{s}$  por dia, igualando seus horários aos horários na Terra. No tempo, essa diferença é imperceptível; porém, no sistema GPS e no cálculo das distâncias, a diferença entre os pontos onde está realmente o receptor e onde este aparece no sistema GPS seria de  $11\text{ km}$ .

Os modernos aparelhos *smartphone*, que enviam e recebem os sinais aos satélites GPS, dispõem as informações na forma de coordenadas geográficas sobre um mapa. Desta forma, tem-se essas informações em aplicativos de localização (*GoogleMaps*, *Waze*) e em aplicativos esportivos para caminhadas ou passeios de bicicleta (*RunKeeper*, *Strava*), como também em aplicativos para jogos em realidade aumentada (*PokémonGo*).

### 3 Problemas geométricos

**Problema 3.1** (ENEM 2002, Questão 55 da Prova 1 - Amarela, página 21 [4]). *As cidades de Quito e Singapura encontram-se próximas à linha do Equador e em pontos diametralmente opostos no globo terrestre. Considerando o raio da Terra igual a  $6370\text{ km}$ , pode-se afirmar que um avião saindo de Quito, voando em média  $800\text{ km/h}$ , descontando as paradas de escala, chega a Singapura em aproximadamente: (A) 16 horas; (B) 20 horas; (C) 25 horas; (D) 32 horas; (E) 36 horas.*

Usando  $\pi = 3,14$  e a medida do raio fornecida no Problema 3.1, calculamos o comprimento da meia circunferência, concluindo que a distância entre Quito e Singapura é de, aproximadamente,  $20.001,8\text{ km}$ . Empregando essa distância e a velocidade média expressa no Problema 3.1, determinamos que a duração aproximada da viagem é de 25 horas. Desta forma, a alternativa C representa a solução do Problema 3.1.

Ao reavaliarmos a solução do Problema 3.1, surgem alguns questionamentos:

1. A distância entre as duas cidades não é linear? Por que calculamos o comprimento de uma circunferência?
2. A distância entre Quito e Singapura é realmente cerca de  $20.000\text{ km}$ ? Como podemos validar esse resultado?

Esses questionamentos permitem que confrontemos conceitos de geometria euclidiana e apresentemos conceitos de geometria esférica, como a noção de distância entre dois pontos em uma superfície esférica e, conseqüentemente, o conceito de reta esférica [3, 6, 11]. Nesta tarefa, o Google Earth pode ser empregado na reavaliação da solução. A etapa inicial é localizar as duas cidades no aplicativo. Uma introdução ao uso do Google Earth, principalmente quanto à estruturação de um projeto, a localização de pontos na superfície terrestre e o uso da ferramenta “Medir distância e área”, encontra-se em Motta e Nós [12, 14].

Após a localização, a ferramenta “Medir distância e área” permite determinar a distância entre as duas cidades. O Google Earth indica que a distância entre Quito e Singapura é de  $19.735,65\text{ km}$  – Figura 2, valor aproximadamente 1,3% menor do que aquele calculado para solucionar o Problema 3.1. Na discussão sobre os porquês dessa diferença, o professor pode elencar alguns quesitos para o debate: as irregularidades do solo (um dos satélites no sistema de trilateração determina a altura

em relação ao nível do mar); a aproximação usada para a constante  $\pi$ ; a Terra tem um raio equatorial e um raio polar, ou seja, não é perfeitamente esférica.

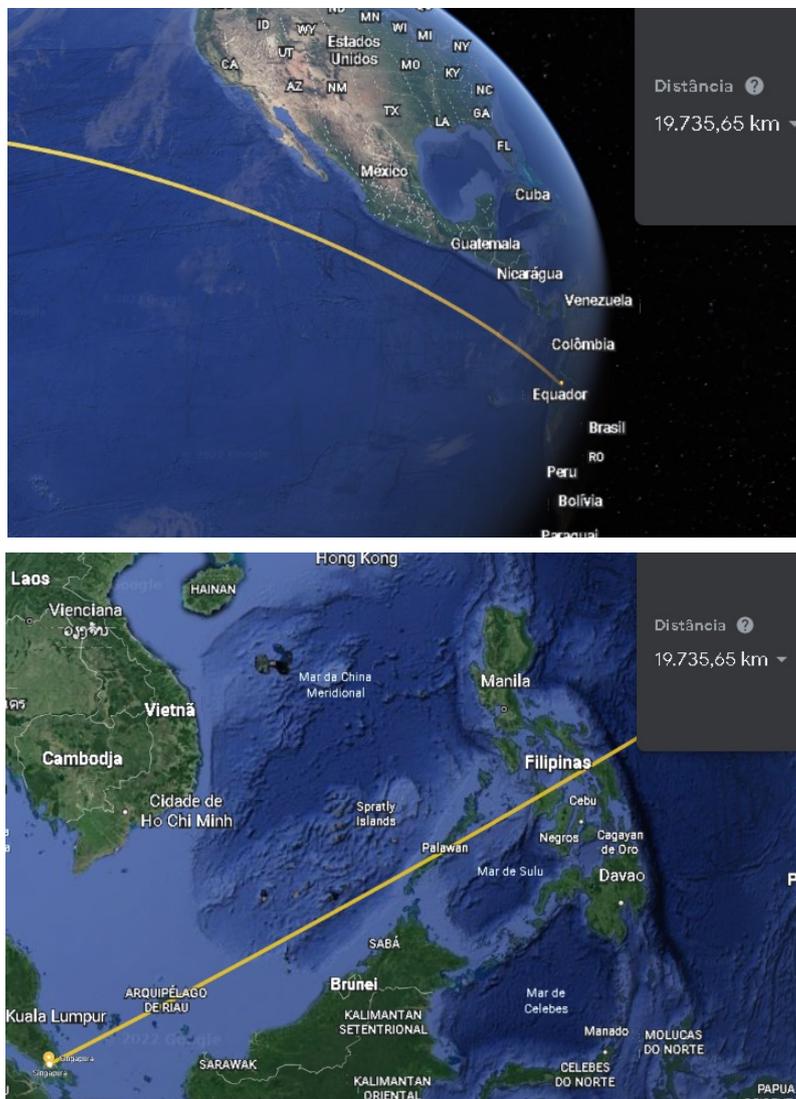


Figura 2: Distância entre as cidades de Quito e Singapura via Google Earth [2, 13].

**Problema 3.2** (IFPE 2020.1, Questão 13 do Exame de Seleção do PROEJA [9]). *O Vaticano é um país reconhecido pela Organização das Nações Unidas (ONU). Situado na zona norte da cidade de Roma, é considerado o menor país do mundo, com  $0,45 \text{ km}^2$  de extensão. Se o Vaticano tivesse a forma de um círculo, qual seria a medida do quadrado de seu raio? (Utilize a aproximação  $\pi = 3$ )*  
 a)  $0,13 \text{ km}^2$ ; b)  $0,14 \text{ km}^2$ ; c)  $0,15 \text{ km}^2$ ; d)  $0,16 \text{ km}^2$ ; e)  $0,17 \text{ km}^2$ .

Empregando  $\pi = 3$  e a relação para o cálculo da área do círculo, concluímos que  $r^2 = 0,15 \text{ km}^2$ , onde  $r$  é a medida do raio círculo. Assim, a alternativa C representa a solução do Problema 3.2.

Na reavaliação da solução do Problema 3.2, alguns questionamentos são inerentes:

1. O formato do Vaticano é circular?
2. Qual foi a fonte empregada para afirmar que a área do Vaticano é de  $0,45 \text{ km}^2$ ? Podemos confrontar esse dado?

Quanto ao primeiro questionamento, a Figura 3(a) ilustra o formato do Vaticano. A área do Vaticano pode ser aproximada pela área de um círculo [13]. Contudo, o formato mais apropriado é a de um polígono com muitos lados. Em relação ao segundo questionamento, conseguimos utilizar o Google Earth para aproximar a área do Vaticano. O primeiro passo é localizar o país. Em seguida, é preciso marcar os pontos para definir o polígono do qual se quer a medida da área. A Figura 3(b) ilustra uma aproximação com muitos pontos, definindo um contorno mais próximo do real formato do Vaticano.



Figura 3: Vaticano: (a) mapa [15]; (b) perímetro e área via Google Earth [13].

Na aproximação com muitos pontos – Figura 3(b), o Google Earth atribui ao Vaticano uma área de aproximadamente  $0,52 \text{ km}^2$ , medida cerca de 15,6% maior do que aquela constante no Problema 3.2. Como justificar a diferença? O professor pode enumerar alguns quesitos à discussão: a referência bibliográfica, que cita a área do Vaticano, empregada na elaboração do Problema 3.2; o número de pontos utilizados para definir o contorno do Vaticano; as irregularidades do solo (um dos satélites no sistema de trileração determina a altura em relação ao nível do mar); a Terra não é perfeitamente esférica.

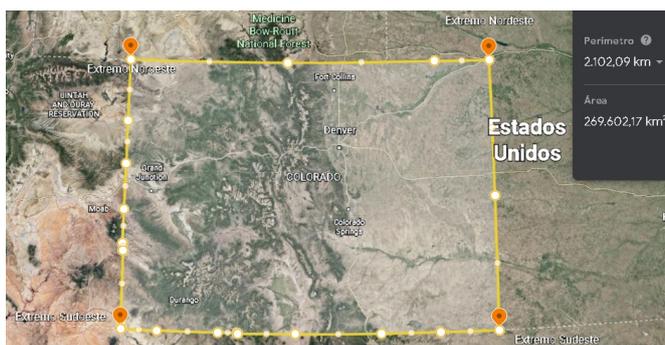
## 4 Considerações Finais

Analizamos neste trabalho a solução de dois problemas geométricos propostos em exames oficiais. Na etapa de retrospecto, segundo as fases de resolução de um problema propostas por George Pólya [16], reavaliamos os resultados de geometria euclidiana plana segundo concepções de geometria esférica. Neste processo, utilizamos o Google Earth, uma tecnologia digital para geolocalização.

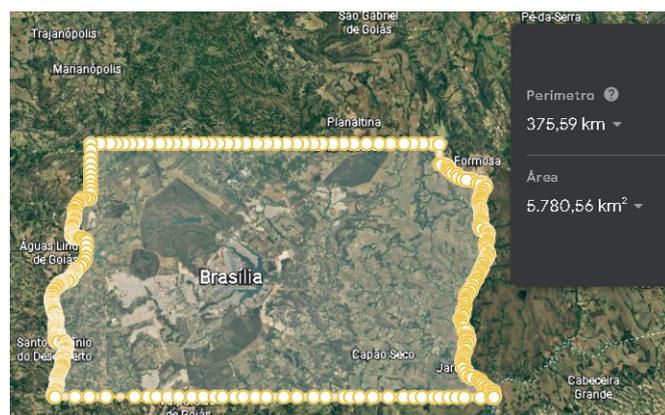
Os dois problemas selecionados são distintos quanto ao grau de dificuldade: o Problema 3.1 relaciona conceitos geométricos, como o comprimento da circunferência, com conceitos físicos, como distância, tempo e velocidade, e conceitos geográficos, como a geolocalização; o Problema 3.2 aborda somente o conceito geométrico de área do círculo. Contudo, ambos permitem explorar o cálculo de distâncias e áreas na superfície terrestre. O emprego do Google Earth possibilita/motiva

desta forma extrapolar conceitos geométricos “locais” válidos na geometria de Euclides [7] e introduzir conceitos de geometrias não euclidianas [1, 3, 6, 11]. Essa extrapolação de conceitos geométricos é importante uma vez que a BNCC [5] não estabelece parâmetros mínimos para o ensino de geometrias não euclidianas no Ensino Fundamental.

O Google Earth pode ser empregado nas aulas de matemática da Educação Básica. Para comprovar grandes áreas sobre a superfície terrestre, sugerimos que o professor inicie explorando regiões com formatos triangulares, como o Triângulo das Bermudas [12, 14], ou quase retangulares, como o estado estadunidense do Colorado – Figura 4(a) – e o Distrito Federal – Figura 4(b).



(a)



(b)

Figura 4: Áreas na superfície terrestre com o Google Earth: (a) estado estadunidense do Colorado; (b) Distrito Federal.

Esperamos que este trabalho contribua à discussão sobre a resolução de problemas, seja como metodologia ou apenas como elemento motivador no processo de ensino-aprendizagem, e principalmente acerca do uso de tecnologias digitais, atendendo assim às competências gerais e específicas da BNCC para o ensino de matemática.

## Referências

- [1] A. J. D. Albon e R. L. Nós. “Construindo tesselações hiperbólicas no disco de Poincaré com o GeoGebra”. Em: **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo** 11(2) (2022), pp. 017–032. DOI: 10.23925/2237-9657.2022.v11i2p017-032.

- [2] F. J. de Almeida. “Desmistificando a teoria da relatividade de Einstein”. Dissertação de mestrado. UTFPR, Campus Curitiba, 2022.
- [3] D. A. Brannan, M. F. Esplen e J. J. Gray. **Geometry**. 2nd. ed. New York: Cambridge University Press, 2012. ISBN: 978-1-107-64783-1.
- [4] BRASIL/INEP. **ENEM 2002**. Online. Acessado em 16/02/2023, [https://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/enem/provas/2002/2002\\_amarela.pdf](https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2002/2002_amarela.pdf).
- [5] BRASIL/MEC. **BNCC (Base Nacional Comum Curricular)**. Online. Acessado em 16/02/2023, [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf).
- [6] C. M. Doria. **Geometrias: euclidiana, esférica e hiperbólica**. Textos Universitários. SBM, 2019. ISBN: 978-85-8337-154-0.
- [7] Euclides. **Os elementos**. São Paulo: Unesp, 2009. ISBN: 978-85-7139-935-8.
- [8] Google. **Google Earth**. Online. Acessado em 16/02/2023, <https://earth.google.com/web/>.
- [9] IFPE. **Exame de seleção/vestibular IFPE 2020.1**. Online. Acessado em 16/02/2023, [https://arquivos.qconcursos.com/prova/arquivo\\_prova/77917/if-pe-2019-if-pe-vestibular-tecnico-proeja-prova.pdf?\\_ga=2.75666387.717178299.1664479344-541144173.1664479344](https://arquivos.qconcursos.com/prova/arquivo_prova/77917/if-pe-2019-if-pe-vestibular-tecnico-proeja-prova.pdf?_ga=2.75666387.717178299.1664479344-541144173.1664479344).
- [10] V. T. da Informação. **GPS: o que é, como funciona**. Online. Acessado em 16/02/2023, <https://www.sofisica.com.br/conteudos/curiosidades/gps.php>.
- [11] G. P. Motta. **Geometrias não euclidianas no plano e geometria esférica**. Online. Acessado em 16/02/2023, [https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/9038/2/CT\\_COMAT\\_2018\\_2\\_04.pdf](https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/9038/2/CT_COMAT_2018_2_04.pdf).
- [12] G. P. Motta e R. L. Nós. “Explorando conceitos e relações de geometria esférica na Licenciatura em Matemática com o Google Earth”. Em: **Educação: teorias, métodos e perspectivas**. Ed. por Antonella Carvalho de Oliveira. Vol. 5. Artemis, 2022. Cap. 8, pp. 78–96. DOI: 10.37572/EdArt\_2705225528.
- [13] R. L. Nós e F. J. de Almeida. “The employment of digital technologies during the retrospective phase in the solution of geometric problems”. Em: **International Journal of Human Sciences Research** 3(7) (2023), pp. 01–12. DOI: 10.22533/at.ed.558372316034.
- [14] R. L. Nós e G. P. Motta. “Geometria esférica na Licenciatura em Matemática”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. 2021, pp. 010420-1–7. DOI: 10.5540/03.2021.008.01.0420.
- [15] Pinterest. **Roma e Vaticano**. Online. Acessado em 16/02/2023, <https://br.pinterest.com/parquesingresso/roma-e-vaticano>.
- [16] G. Pólya. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. 1. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- [17] Unicamp. **Como funciona o sistema de posicionamento global (GPS)**. Online. Acessado em 16/02/2023, <http://www.ime.unicamp.br/~apmat/o-sistema-gps/>.
- [18] R. Wolfson. **Simplemente Einstein: a relatividade desmistificada**. 1. ed. São Paulo: Globo, 2005. ISBN: 85-250-3533-5.