

# Otimização de treliças metálicas planas em perfil tubular circular

Priscila Mantuan Covalski<sup>1</sup>

Engenharia Civil, UTFPR, Campo Mourão, PR

Tatiane Cazarin da Silva<sup>2</sup>

DAMAT, UTFPR, Campo Mourão, PR

Leandro Waidemam<sup>3</sup>

DACOC, UTFPR, Campo Mourão, PR

**Resumo.** O presente trabalho tem como objetivo apresentar um modelo matemático e um método para otimização da seção transversal das barras de treliças metálicas planas em perfil tubular circular, com menor massa possível. A fim de estabelecer comparativos, duas análises foram realizadas: a primeira considera os critérios estabelecidos pela ABNT NBR 8800:2008 - Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios, e a segunda considera os critérios estabelecidos pela ABNT NBR 16239:2013 - Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edificações com perfis tubulares. Para a implementação do problema de minimização, foram utilizados o software MATLAB e sua biblioteca auxiliar *fmincon*. As restrições consideradas foram de força normal resistente, limitação do índice de esbeltez e deslocamentos máximos admissíveis. Os resultados obtidos para as análises discretas se mostraram próximos e mais econômicos, para o caso analisado, do que os resultados apresentados pela literatura de referência, comprovando igual eficiência do algoritmo computacional implementado para o dimensionamento discreto de treliças planas.

**Palavras-chave.** Algoritmo computacional, Otimização estrutural, Programação não-linear.

## 1 Introdução

Na concepção de projetos estruturais, todas as decisões tomadas pelos projetistas devem ser feitas de modo racional, de maneira a minimizar o consumo de material, maximizar sua confiabilidade ou facilitar sua produção, o que reflete significativamente nos custos [9]. Os avanços na tecnologia computacional tornaram possível ao engenheiro projetista a obtenção de um projeto otimizado não mais baseado na intuição e sim em um processo iterativo, a partir da identificação explícita da função objetivo a ser minimizada ou maximizada, bem como as variáveis e as restrições impostas ao algoritmo.

Neste contexto, dispõe-se de técnicas de projeto ótimo que utilizam modelos matemáticos de modo a identificar a solução ótima de mínimo custo que não comprometa a funcionalidade e a segurança do sistema estrutural. Para os autores de [10], problemas de otimização têm o objetivo de identificar as variáveis de projeto em situações em que se deseja maximizar ou minimizar uma função numérica de muitas variáveis, de modo a resolvê-las a fim de representar seus problemas e atender suas restrições na busca da solução. Assim, o emprego de técnicas de otimização conduz a um melhor entendimento no dimensionamento estrutural, pois transforma o aspecto físico da

---

<sup>1</sup>priscilamantuan@hotmail.com

<sup>2</sup>tatianecazarin@utfpr.edu.br

<sup>3</sup>waidemam@utfpr.edu.br

estrutura em aspecto matemático, através de uma modelagem matemática do sistema ou elemento estrutural analisado.

A otimização de estruturas metálicas tem sido tema de um grande número de estudos, sendo a obtenção de estruturas com menor massa, atendendo a critérios normativos um problema comum em projetos estruturais [2]. No caso de treliças, uma estrutura leve, de fácil e rápida execução, o menor custo será representado pelo menor peso que a treliça poderá ter [3]. De acordo com [5], as treliças possuem um vasto campo de aplicação na engenharia, sendo muito utilizadas na construção de pontes, como estruturas de cobertura, em torres de transmissão de energia, entre outros usos.

Nesse contexto, se faz o presente trabalho, com o intuito de buscar a solução ótima para problemas de otimização da seção transversal de treliças metálicas planas em perfil tubular circular por meio da minimização da função objetivo, representada pela massa da estrutura, sujeita a restrições pré-estabelecidas em normas [6, 7], através da utilização de algoritmos computacionais.

## 2 Modelo Matemático

Matematicamente, a otimização de treliças metálicas planas em perfil tubular circular consiste na minimização do peso da estrutura sujeita a tensões, deslocamentos e restrições de dimensão mínima dos elementos [11]. Com o objetivo de minimizar o peso da treliça como um todo, dadas as restrições impostas pelas normas [7] e [6], e modelagem via Método dos Elementos Finitos para a obtenção da força normal atuante em seus membros e deslocamentos nodais, o problema de otimização da seção transversal de treliças metálicas planas em perfil tubular circular, para  $n$  barras, pode ser definido como:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & F(A_1, A_2, \dots, A_n) = \rho_s \sum_{i=1}^n A_i L_i \\ \text{sujeito a} \quad & \max_{i=1, \dots, p} |u_i| \leq \delta_{max} \\ & (I) \begin{cases} N_{t, Sd} \leq N_{t, Rd} \\ \frac{L}{r} \leq 300 \end{cases} \\ & (II) \begin{cases} N_{c, Sd} \leq N_{c, Rd} \leq N_{t, Rd} \\ \frac{KL}{r} \leq 200 \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

sendo  $A$  a área da seção transversal e  $L$  o comprimento da barra de treliça;  $\rho_s$  a massa específica do aço;  $u$  o vetor de deslocamentos nodais da treliça;  $\delta_{max}$  o deslocamento máximo admitido;  $N_{t, Sd}$  a força axial de tração solicitante de cálculo;  $N_{t, Rd}$  a força axial de tração resistente de cálculo;  $r$  o raio de giração da barra;  $K$  o coeficiente de flambagem da barra,  $N_{c, Sd}$  a força axial de compressão solicitante de cálculo e  $N_{c, Rd}$  a força axial de compressão resistente de cálculo. O conjunto de restrições (I) é relacionado às barras tracionadas e (II) ao conjunto de barras comprimidas.

Com base no problema (1) são apresentadas algumas discussões numéricas. Para uma primeira análise são considerados os critérios de restrição abordados pela norma brasileira [7], de forma que o valor do coeficiente de redução associado à resistência à compressão seja dado pelo item 5.3.3.1 da mesma norma. O intuito dessa simulação é de estabelecer um comparativo com os resultados obtidos através do dimensionamento por perfis comerciais, por meio de análise contínua e de resultados apresentados na literatura.

Este procedimento define uma área de seção transversal otimizada para cada barra da treliça considerando as restrições e gera uma matriz de valores ótimos para as variáveis diâmetro e espessura. A seguir, o algoritmo dimensiona cada barra da treliça de maneira discreta, ou seja, o

software de otimização seleciona um perfil com dimensões comerciais<sup>4</sup> dentre um conjunto discreto fornecido através de um arquivo de texto, utilizando os mesmos critérios de restrição impostos pela norma e gerando uma nova matriz de resultados. Por fim, o valor da função objetivo será novamente calculado para fins de comparação. Para a análise discreta o algoritmo avaliará o perfil de menor área que atenda as mesmas restrições estabelecidas por norma para a análise contínua.

Uma segunda análise da treliça é realizada considerando os critérios de restrição estabelecidos pela ABNT NBR 16239:2013. O problema assume que a força de tração é transmitida diretamente para cada um dos elementos da seção transversal da barra por soldas ou parafusos. Em ambos os casos, portanto, de acordo com o item 5.2.5 a) da norma brasileira [7], o coeficiente de redução da área líquida é igual a 1, de maneira que a única diferença entre as duas normas passe a ser o cálculo do coeficiente de redução associado à compressão, para este caso dado pelo item 5.2 da norma brasileira [6]. Em resumo, a única diferença entre as duas normas é o cálculo do coeficiente de redução associado à compressão.

### 3 Resultados e discussões

Devido a escassez de resultados na literatura, a validação dos resultados será feita por comparações com [3], sendo que a única diferença na formulação do problema matemático deve-se ao método de dimensionamento, onde a norma americana [12] utiliza tensões admissíveis.

Para comparação dos resultados com a bibliografia será admitido que todos os carregamentos sejam provenientes de ações permanentes. O peso próprio da estrutura não foi considerado. E, para a comparação e verificação dos resultados obtidos para as análises discretas fez-se uso do software educacional AutoMETAL.

Para o modelo teórico considerado em (1), um algoritmo computacional foi desenvolvido com o auxílio da rotina *fmincon*, presente na biblioteca de otimização do software MATLAB, utilizando o método dos pontos interiores como algoritmo de minimização. As configurações *default* foram mantidas, exceto o número máximo de avaliações de funções permitidas (30000), número máximo de iterações permitidas (10000) e tolerância para as variáveis (1e-10), alterados com o intuito de refinar os resultados. Para a análise contínua serão considerados módulo de elasticidade longitudinal de 69 MPa (10000 Ksi), massa específica do aço de 2768 kg/m<sup>3</sup> (0,1 pci) e limitação do deslocamento nodal máximo.

As simulações numéricas foram empregadas inicialmente em uma treliça plana e isostática, proposta por [4], que é composta por 11 nós contraventados e 18 barras, sujeita a 5 cargas concentradas de intensidade 89 kN (20 Kips) aplicadas nos nós do banzo superior e seu deslocamento é restringido por dois apoios fixos nos nós 10 e 11, conforme a Figura 1.

Como parâmetros de entrada foram considerados: coeficiente de ponderação da resistência do aço relacionado ao escoamento, flambagem e instabilidade ( $\gamma_{a1}$ ): 1,10, coeficiente de ponderação da resistência do aço relacionado à ruptura ( $\gamma_{a2}$ ): 1,35, Constante de empenamento da seção transversal ( $C_w$ ): 0, Módulo de elasticidade transversal ( $G$ ): 70 GPa, Resistência ao escoamento do aço ( $f_y$ ): 250 MPa e Resistência à ruptura do aço ( $f_u$ ): 400 MPa. O intuito é observar a existência de uma vantagem econômica em se utilizar a norma brasileira [6] para o dimensionamento de treliças metálicas planas em perfil tubular circular. A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos para a análise contínua.

<sup>4</sup>Foi utilizado o catálogo de tubos estruturais, seção tubular circular, da empresa Vallourec Soluções Tubulares do Brasil

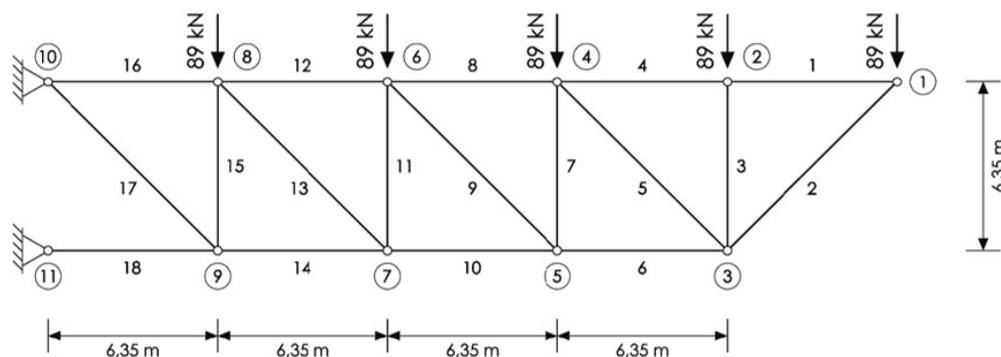


Figura 1: Treliça plana. Fonte: Adaptado de [4]

Tabela 1: Comparativo entre as normas NBR 8800 [7] e NBR 16239 [6].

Barra	ABNT NBR 8800:2008 [7]	ABNT NBR 16239:2013 [6]
	Área (cm <sup>2</sup> )	Área (cm <sup>2</sup> )
1	5,4824	5,4824
2	25,9019	25,2916
3	18,3148	17,8405
4	5,4824	5,4824
5	15,5066	15,5066
6	30,4199	28,3776
7	30,4199	28,3776
8	16,4472	16,4472
9	23,2599	23,2599
10	55,9939	50,0483
11	38,7466	34,4772
12	32,8944	32,8944
13	31,0131	31,0131
14	87,864	79,1635
15	47,5047	42,3677
16	54,824	54,824
17	38,7664	38,7664
18	124,4776	113,1596
Massa (kg)	1298,94	1227,24

Todas as barras obtiveram 100% de eficiência para as duas normas consideradas. Verifica-se que a restrição não-linear ativa é a de força normal resistente de cálculo e, para estes casos, as análises apresentaram diferenças no cálculo da área entre as normas utilizadas. Os resultados obtidos demonstram uma economia no consumo de material pela treliça dimensionada e analisada considerando os critérios de restrição estabelecidos pela norma [6] em comparação a norma [7], no qual se obteve uma diferença percentual de 5,52%.

Ainda para a análise contínua é feito um comparativo entre os resultados obtidos pela minimização do problema utilizando o software MATLAB e a rotina *fmincon* e os resultados obtidos por [3] utilizando o software GAMS e o otimizador MINOS. Para se obter um melhor comparativo, 4

grupos de barras foram considerados e divididos por banzo superior, banzo inferior, montantes e diagonais. Mantém-se a premissa de que para cada elemento de um determinado grupo, a área da seção transversal será adotada pela maior área otimizada entre os elementos pertencentes ao grupo. Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 2.

Tabela 2: Comparativo entre o método proposto e Cortês [3].

Grupo de barras	Área da seção transversal (cm <sup>2</sup> )	
	Cortês [3]	Método proposto
1 - 4 - 8 - 12 - 16	64,516	54,824
2 - 6 - 10 - 14 - 18	139,6836	124,4776
3 - 7 - 11 - 15	80,645	47,5047
5 - 9 - 13 - 17	45,6193	38,7664
Massa (kg)	2916,84	2385,83

Observa-se uma diferença percentual de 18,20% da massa da treliça quando são comparados os resultados obtidos para a análise, que pode ser justificada pelo método de minimização matemática utilizado, que poderia ter encontrado um mínimo local diferente do mínimo local analisado pelo software GAMS, além da divergência na metodologia de cálculo utilizada para a restrição de força normal resistente devido ao método de tensões admissíveis utilizado pela norma americana [12], dado que esta é a restrição ativa para o problema de otimização.

Para a análise discreta os elementos de barra foram divididos em 4 grupos distintos, assim como proposto por [3], e limitou-se a quantidade de perfis disponíveis para o dimensionamento de cada um dos grupos de barras. Assim como para o problema proposto por [1], os resultados obtidos para a análise contínua serviram como referência para escolha dos perfis disponíveis por grupo de barras necessários na análise do problema discreto. Para cada elemento de um determinado grupo, a área da seção transversal será adotada pela maior área otimizada entre os elementos pertencentes ao grupo. Os perfis disponíveis por grupo são listados na tabela 3.

Tabela 3: Perfis disponíveis por grupo de barras. Fonte: Adaptado de [3].

Grupo de Barras	Perfis Disponíveis
1 - 4 - 8 - 12 - 16	14.1 – 14.2 – 14.3
2 - 6 - 10 - 14 - 18	16.1 – 16.2 – 16.3
3 - 7 - 11 - 15	13.1 – 13.2
5 - 9 - 13 - 17	12.1 – 12.2 – 12.3 – 12.4 – 12.5 – 12.6 – 12.7

Para que se obtenha um melhor comparativo dos resultados com [3], foram considerados os dados do aço ASTM A-36, que possui módulo de elasticidade longitudinal de 200 GPa (29 Ksi) e massa específica de 7750 kg/m<sup>3</sup> (0,28 pci). Os resultados obtidos para esta análise são apresentados na Tabela 4. A área de cada seção transversal foi reescrita em função do diâmetro e da espessura da mesma. Considerando  $D$  o diâmetro externo do perfil metálico e  $t$  a sua espessura de parede, a área de cada seção  $i$  pode ser calculada por  $A_i = \pi \left(\frac{D_i}{2}\right)^2 - \pi \left(\frac{D_i}{2} - t_i\right)^2 = \pi(D_i e_i - e_i^2)$ .

Tabela 4: Comparativo 2 entre o algoritmo proposto e Cortês [3] .

Grupo de barras	Cortês [3]		Método proposto	
	Área (cm <sup>2</sup> )	Perfil (D/t em cm)	Área (cm <sup>2</sup> )	Perfil (D/t em cm)
1 - 4 - 8 - 12 - 16	59,3098	27,30/0,71	59,3098	27,30/0,71
2 - 6 - 10 - 14 - 18	111,7336	35,56/1,03	94,8142	35,56/0,87
3 - 7 - 11 - 15	46,6432	21,91/0,70	42,7659	21,91/0,64
5 - 9 - 13 - 17	39,809	16,83/0,79	39,809	16,83/0,79
Massa (kg)	6462,85		5935,72	

Pode-se verificar uma diferença percentual de 8,16% em comparação aos resultados apresentados por [3], diferença justificada devido ao comportamento do código proposto em definir áreas de seção transversal menores para as barras do banzo inferior e montantes da treliça analisada, tornando o algoritmo eficaz para a otimização do projeto estrutural. Uma segunda análise discreta foi realizada considerando novamente os critérios de restrição estabelecidos pela norma brasileira [7], para fins de comparação com o software educacional AutoMETAL, que utiliza como critério de restrição a norma [8]. Os resultados obtidos estão mostrados na Tabela 5.

Tabela 5: Comparativo entre o algoritmo proposto e o AutoMETAL.

Grupo de barras	AutoMETAL		Método proposto	
	Área (cm <sup>2</sup> )	Perfil (D/t em cm)	Área (cm <sup>2</sup> )	Perfil (D/t em cm)
1 - 4 - 8 - 12 - 16	57,5062	21,91/0,87	59,3098	27,30/0,71
2 - 6 - 10 - 14 - 18	94,8142	35,56/0,87	94,8142	35,56/0,87
3 - 7 - 11 - 15	42,7659	21,91/0,64	42,7659	21,91/0,64
5 - 9 - 13 - 17	39,809	16,83/0,79	39,809	16,83/0,79
Massa (kg)	5891,34		5935,72	

Em relação aos resultados obtidos com a utilização do software educacional AutoMETAL, verifica-se a diferença percentual de apenas 0,75% em comparação aos resultados obtidos pelo software MATLAB. Tal proximidade reforça a possibilidade de eficiência do algoritmo proposto para a otimização discreta em projetos estruturais, e a divergência na metodologia de cálculo das barras solicitadas por forças normais de compressão não inferiu grande diferença entre as análises.

A fim de verificar a eficácia do modelo proposto, foi realizada uma segunda aplicação, utilizando uma treliça plana clássica composta por 6 Nós e 10 Barras [1]. Por limitação de espaço, serão apresentados apenas os resultados: na comparação entre as normas, a ABNT NBR 16239:2013, se mostrou 6,68% mais econômica. Agora, comparando o desempenho do método proposto em relação a [3] os resultados do método proposto foram: massa da área da seção transversal com peso 16,45% inferior; peso da treliça superior em 0,18%, e, em relação ao software educacional AutoMETAL, superior em 2,21%.

De maneira geral, em todas as análises é válido ressaltar que arredondamentos nos dados de entrada podem gerar resultados divergentes, ocasionando a problemas mais complexos e com maior número de barras, diferença no cálculo de área da seção transversal, uma vez que dado um grupo de perfis limitados por um conjunto discreto, a escolha do perfil anterior ou sucessor diminua ou aumente consideravelmente a área de seção transversal do elemento de barra. Por fim, vale destacar que as comparações foram feitas a fim de demonstrar a viabilidade e confiabilidade dos resultados obtidos pelo algoritmo desenvolvido. Ainda que as análises tenham sido realizadas considerando-se metodologias propostas por normas distintas, a proximidade entre os resultados obtidos demonstra que o algoritmo proposto torna-se uma ferramenta eficiente e plausível para o estudo considerado.

## 4 Considerações finais

A análise dos resultados para a otimização contínua evidencia a eficiência do algoritmo desenvolvido, uma vez que, para os problemas apresentados neste trabalho que consideram como restrições da função objetivo os critérios estabelecidos pela norma brasileira [7], a rotina `fmincon` convergiu para um ponto de mínimo local, fornecendo resultados satisfatórios quando comparados com a literatura de referência. Os resultados obtidos para as análises discretas se mostraram muito próximos e porventura até mais econômicos para alguns casos analisados do que os resultados apresentados pela literatura de referência e também pelo software educacional AutoMETAL, comprovando igual eficiência do algoritmo computacional implementado para o dimensionamento discreto de treliças planas. Portanto pode-se garantir a viabilidade do algoritmo proposto por este trabalho para o dimensionamento de projetos de treliças mais econômicos e que atendam aos critérios normativos, garantindo segurança e reduzindo os custos de execução.

## Referências

- [1] R. J. Allwood e Y. S. Chung. “Minimum-weight design of trusses by an optimality criteria method”. Em: **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. 1984, pp. 697–713.
- [2] S. R. M. Almeida, M. J. Souza e P. F. Amaral. “Otimização não-determinística de treliças”. Em: **Revista Eletrônica de Engenharia Civil**. 2019.
- [3] C. F. M. Cortês. “Otimização de Treliças Planas”. Tese de doutorado. Faculdade Estadual de Campinas, 2002.
- [4] S. R. Hansen e G. N. Vanderplaats. “Approximation Method for Configuration Optimization of Trusses”. Em: **AIAA Journal**. 1990, pp. 161–168.
- [5] M. Kripka et al. “Minimização do peso de treliças de alumínio pela otimização simultânea da seção transversal dos elementos e da geometria: análise numérica e validação experimental”. Em: **Revista Eletrônica de Engenharia Civil**. 2013, pp. 19–26.
- [6] Associação Brasileira de Normas Técnicas. **ABNT NBR 16239: projeto de estruturas de aço e estruturas mistas de aço e concreto de edifícios**. ABNT. 2013.
- [7] Associação Brasileira de Normas Técnicas. **ABNT NBR 8800: projeto de estruturas de aço e estruturas mistas de aço e concreto de edifícios**. ABNT. 2008.
- [8] Associação Brasileira de Normas Técnicas. **ABNT NBR 8800: projeto de estruturas de aço e estruturas mistas de aço e concreto de edifícios**. ABNT. 1986.
- [9] S. R. C. Oliveira e G. A. S. Falcón. “Otimização geométrica de treliças planas utilizadas em coberturas metálicas”. Em: **Vértices**. 2013, pp. 101–115.
- [10] L. M. P. Ribeiro. “Otimização e dimensionamento de treliças planas de madeira empregando o método dos algoritmos genéticos”. Tese de doutorado. Universidade Federal de Uberlândia, 2008.
- [11] R. P. Souza e J. S. O. Fonseca. “Optimum Truss Design under Failure Constraints Combining Continuous and Integer Programming”. Em: **International conference on Engineering Optimization, COPPE/UFRJ**. 2008.
- [12] American Institute of Steel Construction. **Specification for Structural Steel Buildings: Allowable Stress Design and Plastic Design**. AISC. 1989.