Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

A Quadratura de Kutt na solução de integrais impróprias com singularidade de grau $\beta = 1$

Carlos A. R. Vera Tudela[1], Victor H. S. Wichan[2]
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UFRRJ, Seropédica, RJ

Resumo. Neste trabalho apresenta-se um estudo teórico sobre as integrais impróprias com singularidade forte ou, também denominada, de grau $\beta = 1$. É apresentado o processo de Kutt para a resolução, em partes finitas, das integrais interpretadas no sentido de valor principal de Cauchy. O resultado do trabalho, após os conceitos apresentados, é um algoritmo que resolve este tipo de integrais impróprias e são estudados exemplos de verificação. Este trabalho faz parte de um projeto maior que envolve a resolução de integrais impróprias dos tipos fraca, forte e hipersingular. O algoritmo desenvolvido foi escrito em Matlab®utilizando a *toolbox* de matemática simbólica. Com esta ferramenta podem-se efetuar cálculos de diferentes naturezas, designadamente. O resultado final é um programa mais compacto e mais eficiente.

Palavras-chave. Modelagem Matemática, Integrais Singulares, Valor Principal de Cauchy, Matemática Simbólica.

1 Introdução

Na engenharia moderna, um dos principais focos dos estudos científicos é representar uma situação real através de um modelo que venha descrever com precisão a geometria estudada, forças atuantes, entre outros. Alguns métodos numéricos de modelagem como Método de Diferenças Finitas (MDF) [1], Método de Elementos de Contorno (MEC) [2] e Método de Elementos Finitos (MEF)[7] tem ganhado relevância nas últimas décadas. Embora esses métodos sejam majoritariamente análogos, nesse trabalho será abordado o MEC e sua relação com as integrais singulares.

O MEC transforma as Equações Diferencias em Equações Integrais de Contorno (EIC), diminuindo assim a quantidade de incógnitas dos problemas quando comparado ao MEF e MDF. Isso o torna mais atrativo para determinados problemas como os de estudos de potencial, deformação ou fratura. Por exemplo, quando se realiza uma modelagem de um problema de fratura, e já existe a suspeita que a fratura ocorrerá no contorno da geometria, torna-se mais atrativo optar pelo MEC do que com os outros métodos.

O objetivo desse trabalho é propor uma implementação da quadratura de Kutt para a solução de integrais singulares, que é uma ferramenta que pode ser utilizada em EIC. Com a intenção de alcançar o objetivo que foi determinado, a metodologia adotada nesse trabalho parte em primeiro lugar de um estudo teórico-matemático dos tópicos afins, em segundo lugar, descreve-se a abordagem numérica e em terceiro lugar, a implementação computacional (características, organização e funcionamento) e, finalmente, faz-se a validação dos códigos desenvolvidos através da análise de problemas que possuem solução analítica conhecida. A implementação computacional foi realizada através do Software Matlab®.

[1]candres@ufrrj.br
[2]victorwichan@hotmail.com

2 Formulações do MEC na Elasticidade

Os problemas pertinentes à mecânica dos sólidos são, na sua maior parte, problemas de campo vetorial, pois a cada ponto estão associadas grandezas cuja definição requer a identificação de módulo, direção e sentido, como no caso dos deslocamentos.

Estes problemas são estudados por teorias simplificadas, como o caso da elasticidade linear, onde são consideradas algumas simplificações ou idealizações, como é o caso de considerar o problema estático, material elástico, linear e homogêneo, entre outras.

Inicia-se o estudo escrevendo-se a Equação de Navier,

$$Gu_{j,ii} + \frac{G}{(1-2\nu)} u_{i,ij} = 0, \quad \text{em } \Omega. \tag{1}$$

em que u_j é o vetor deslocamento. G é o módulo de elasticidade transversal, ν é o coeficiente de Poisson e Ω é o domínio do problema.

Mas existe outra forma de poder escrever esta equação, correspondendo àquela que utiliza as constantes de Lamé ν e λ. Assim, a Equação de Navier é escrita da forma seguinte:

$$\nu u_{j,ii} + (\lambda + \nu) u_{i,ij} = 0, \quad \text{em } \Omega. \tag{2}$$

A formulação tradicional do MEC consiste em ponderar a equação (2) por uma função u_j^* , com características especiais e depois integrá-la no domínio. Por meio de um tratamento matemático adequado, transforma-se esta equação integral de domínio em uma equação integral de contorno.

É interessante notar que a função u_j^* , chamada de solução fundamental, é a solução de um problema especial correlato (de elasticidade) cujo domínio é infinito ou semi-infinito, onde as forças de corpo são ações concentradas no domínio, atuando nas direções coordenadas, assim:

$$\nu u^*_{j,ii} + (\lambda + \nu) u^*_{i,ij} = 0, \quad \text{em } \Omega. \tag{3}$$

Assim, após uma série de manipulações matemáticas chega-se à expressão clássica do Método dos Elementos de Contorno [8],

$$C_{ij} u_j(\xi) + \int_\Gamma u_j(x) p^*_{ij}(\xi, x) d\Gamma(x) = \int_\Gamma p_j(x) u^*_{ij}(\xi, x) d\Gamma(x). \tag{4}$$

que é válida para o contorno do problema. Observe-se que C_{ij} é um coeficiente que depende da geometria do corpo, Γ representa o contorno do problema, ξ indica o ponto fonte e x indica o ponto campo.

3 Soluções Fundamentais

A solução fundamental é a solução de um problema especial correlato de elasticidade cuja equação de governo é válida a partir da equação de Navier,

$$Gu^*_{j,ii} + \frac{G}{(1-2\nu)} u^*_{i,ij} = 0. \tag{5}$$

Desta forma, o problema fundamental governado pela equação (1) também obedece aos princípios do equilíbrio, ou seja:

$$\sigma^*_{ij,i} = 0, \quad \text{em } \Omega^*. \tag{6}$$

Existem várias soluções da equação (5) que podem ser empregadas. Estas variam com relação ao domínio considerado e com as condições de contorno escolhidas. Será apresentada a solução de Kelvin, que considera o domínio Ω^* infinito, com propriedades e comportamento elástico, onde uma carga unitária concentrada atua nas 3 direções coordenadas.

Em casos bidimensionais de estado plano de deformação, os deslocamentos u^*_{ij} e as forças de superfície p^*_{ij} são dados pelas equações abaixo:

$$u^*_{ij}(\xi, x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G}\{(3-4\nu)\ln(r)\delta_{ij} - r_{,i}\, r_{,j}\}. \tag{7}$$

e

$$p^*_{ij}(\xi, x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r}\left\{[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}\, r_{,j}]\frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}\, n_{,j} - r_{,j}\, n_{,i})\right\}. \tag{8}$$

em que a variável $r = r(\xi, x)$ representa a distância entre o ponto fonte ξ, de aplicação da carga, e o ponto campo x. As derivadas são tomadas com relação às coordenadas x_i e n_i são os cossenos diretores.

Observe-se que os termos de singularidade estão nas funções $\ln(r)$, singularidade fraca e $\frac{1}{r}$, singularidade forte [4]. Assim, este trabalho foca no estudo e na resolução do tipo de singularidade forte.

3.1 Tensões em Pontos Internos

Para o cálculo das tensões nos pontos internos, parte-se da equação (4) com $C_{ij} = 1$, e derivando-a em relação às coordenadas do ponto ξ:

$$\frac{du_i(\xi)}{dx_k(\xi)} = \int_\Gamma p_j(x)u^*_{ij,k}(\xi, x)d\Gamma(x) - \int_\Gamma u_j(x)p^*_{ij,k}(\xi, x)d\Gamma(x). \tag{9}$$

Esta expressão fornece as deformações específicas que, através da Lei de Hooke, permitem encontrar as tensões nos pontos internos.

Então, pode-se escrever diretamente que a expressão para os pontos internos é:

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_\Gamma p_k(x)u^*_{ijk}(\xi, x)d\Gamma(x) - \int_\Gamma u_k(x)p^*_{ijk}(\xi, x)d\Gamma(x). \tag{10}$$

E tem-se as seguintes expressões para as soluções fundamentais:

$$u^*_{ijk} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r}\{(1-2\nu)(r_{,j}\,\delta_{ik} + r_{,i}\,\delta_{jk} + r_{,k}\,\delta_{ij}) + 2r_{,i}\, r_{,j}\, r_{,k}\} \tag{11}$$

e

$$\begin{aligned} p^*_{ijk} &= \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2}\Bigg[2\frac{\partial r}{\partial n}[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}\, r_{,j}\, r_{,k}] \\ &+ 2\nu(n_i r_{,j}\, r_{,k} + n_j r_{,i}\, r_{,k}) + (1-2\nu)(2n_k r_{,i}\, r_{,j} + n_j\delta_{ik} + n_i\delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k\delta_{ij}\Bigg]. \end{aligned} \tag{12}$$

que são válidas para o caso da analise bidimensional.

Observe-se, também, que nas equações (11) e (12) tem-se as singularidades do tipo forte e hipersingular respectivamente

4 Integrais Singulares no Método dos Elementos de Contorno

No MEC, é comum em suas formulações aparecerem equações integrais com algum nível de singularidade. Nas Ciências e Engenharias, os problemas estudados, comumente são representados por equações diferencias ordinárias ou equações diferenciais parciais e também por equações integrais. Como é sabido, são poucas as equações diferenciais que possuem solução analítica de forma que as soluções aproximadas tornam-se importantes na solução de muitos problemas. O MEC se enquadra nesta categoria. Embora este trabalho não estude a fundo a teoria e técnicas relacionadas ao Método dos Elementos de Contorno, o objetivo é focar num problema muito relevante que é a resolução das integrais singulares.

4.1 Classificação quanto a Singularidade da Integral

Observando a Equação (13) o termo de r é o responsável pela singularidade quando o ponto fonte (x) vai se aproximando do ponto campo (ξ).

$$I(x) = \int_{\Omega} \frac{f(x,\xi)}{r^{\beta}(x,\xi)} d\Omega(\xi). \tag{13}$$

onde $f(x,\xi)$ é limitado no intervalo considerado e $r(x,\xi) = x - \xi$ é a distância entre o nó fonte e o nó campo. Também, a partir do parâmetro β se define a classificação dos tipos de singularidade como pode-se verificar na tabela 1,

Tabela 1: Calassificação da singuaridade.

Nível de Singularidade	Potência β
Singularidade fraca	$0 < \beta < 1$
Singularidade forte	$\beta = 1$
Hipersingular	$\beta = 2$
Supersingular	$\beta = 3$

As integrais regulares e com singularidade fraca na maioria das vezes tem solução analítica ou aproximada, ou seja, é possível calcular suas partes finitas. No entanto, para integrais com singularidade forte, hipersingular e supersingular, as integrais só existem sob algumas condições, dependendo fortemente das características da função $f(x,\xi)$. Para problemas que resultem em singularidades fraca e forte, o valor principal de Cauchy consegue calcular sua parte finita. No entanto, quando o problema apresenta $\beta = 2$, é necessário utilizar a teoria da Parte Finita de Hadamard [3].

4.2 Quadratura de Kutt

Com o objetivo de suprir a necessidade de um método que atendesse à resolução de integrais singulares do tipo forte, Kutt [5] [6] apresentou um método de calcular a parte finita de integrais de tipo:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{(x-s)} dx. \tag{14}$$

sabendo que $f(x)$ é uma funçõ de uma variável real x. A equação (14) aproxima-se através de um produto escalar de pesos e valores da função em um número de pontos pré-determinados. Estes pontos são igualmente espaçados no intervalo $[s, r]$, de forma que o primeiro ponto coincide com s, mas nenhum deles com r. Dados N pontos de integração, o grau de precisão da fórmula desenvolvida por Kutt é $N-1$.

O Valor principal de Cauchy pode ser calculado pela quadratura de Kutt. Neste processo, as partes finitas das integrais envolvidas são utilizadas.

Considere a integral mostrada na equação (14),

$$\int_a^b \frac{f(x)}{(x-s)}dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\left\{\int_a^{s-\varepsilon} \frac{f(x)}{(x-s)}dx + \int_{s+\varepsilon}^b \frac{f(x)}{(x-s)}dx\right\} \tag{15}$$

com $a < s < b$, em que $f(x)$ satisfaz a condição de Holder em s e $f(s) \neq 0$, de modo que a singularidade é de ordem um.

Utilizando integração em partes finitas nas duas integrais à direita da equação (15), obtém-se:

$$I = I' + I''. \tag{16}$$

sendo

$$I' = \int_a^s \frac{f(x)}{(x-s)}dx. \tag{17}$$

e

$$I'' = \int_s^b \frac{f(x)}{(x-s)}dx. \tag{18}$$

Pode-se fazer uma mudança de variáveis nas equações (17) e (18), de tal forma que os intervalos de integração se tornem unitários, resultando nas seguinte equações,

$$I' = \int_a^s \frac{f(x)}{(x-s)}dx = -\int_0^1 \frac{f((a-s)t+s)}{t}dt + f(s)\ln|a-s|. \tag{19}$$

e

$$I'' = \int_s^b \frac{f(x)}{(x-s)}dx = \int_0^1 \frac{f((b-s)t+s)}{t}dt + f(s)\ln|b-s|. \tag{20}$$

Utilizando as fórmulas de Kutt, para a resolução da integrais (19) e (20), obtém-se:

$$I' = \int_a^s \frac{f(x)}{(x-s)}dx \approx -\sum_{i=1}^{n} f((a-s)t_i+s)w_i - f(s)\ln|a-s|. \tag{21}$$

e

$$I'' = \int_s^b \frac{f(x)}{(x-s)}dx \approx \sum_{i=1}^{n} f((b-s)t_i+s)w_i - f(s)\ln|b-s|. \tag{22}$$

em que t_i representa as coordenadas dos pontos de integração de Kutt e w_i são os fatores de peso correspondentes.

4.3 Exemplo de Aplicação

Considere-se a integral seguinte que possui solução analítica,

$$\int_{-3}^{5} \frac{1}{x} dx = 0.510825623765990. \tag{23}$$

Utilizando os conceitos da quadratura de Kutt, é feita uma mudança de variável do intervalo inicial $[-3, 5]$ para o intervalo $[-1, 1]$, de tal forma que,

$$\int_{-3}^{5} \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^{1} \frac{4}{4t+1} dt \approx I_1 + I_2. \tag{24}$$

Utilizando as equações (21) e (22) e considerando $n = 10$,

$$I_1 = VPC \int_{-1}^{0} \frac{4}{4t+1} dt \approx 0.287682073931781. \tag{25}$$

$$I_2 = VPC \int_{0}^{1} \frac{4}{4t+1} dt \approx 0.223143549834210. \tag{26}$$

Finalmente,

$$I = I_1 + I_2 \approx 0.510825623765991. \tag{27}$$

Comparando a solução analítica com a solução obtida com a quadratura de Kutt obtém-se um erro relativo percentual de 2.17×10^{-13}.

5 Considerações Finais

Este trabalho é parte de um projeto de dissertação de mestrado que estuda diversos métodos para a resolução de integrais singulares dos tipos regular, fraca, forte e hipersingular. Apresentase, especificamente, um método para resolver integrais singulares do tipo forte onde se calcula o Valor Principal de Cauchy. O método é muito confiável e os resultados demonstram que bastam 10 pontos de integração para obter resultados muito próximos da solução analítica.

Considera-se, que o fato de ter que dividir o intervalo de integração no ponto onde acontece a singularidade, seja prejudicial ao método, pois deverão ser resolvidas duas integrais numericamente. Ainda assim, o erro relativo percentual foi muito pequeno, próximo do zero.

O Projeto da dissertação, ainda estuda as integrais hipersingulares e quase-singulares, que certamente serão objeto de um trabalho futuro.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) e Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.

Referências

[1] K. J. Bathe. **Finite Elements Procedures**. 2a. ed. USA: Prentice Hall, 2014. ISBN: 9780979004957.

[2] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles e L. C. Wrobel. **Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering**. 1a. ed. Berlin: Springer, 2012. ISBN: 9783642488627.

[3] Y. S. Chan e et al. "Finite part integrals and hypersingular kernels". Em: **Advances in Dynamical Systems** 14 (2007), pp. 264–269.

[4] X. W. Gao. "Evaluation for regular and singular domain integrals with boundary-only discretization: Theory and Fortran Code". Em: **Journal of Computational and Applied Mathematics** 175 (2005), pp. 265–290. DOI: 10.1016/j.cam.2004.05.012.

[5] H. R. Kutt. "Quadrature formulae for finite part integrals". Em: **Report WISK 178. The National Research Institute for Mathematical Sciences** 175 (1975).

[6] H. R. Kutt. "The numerical evaluation of principal value integrals by finite part integration". Em: **Numerische Mathematik** 24 (1975), pp. 205–210. DOI: 10.1007/BF01436592.

[7] R. J. Leveque. **Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations**. 1a. ed. Philadelphia: SIAM, 2007. ISBN: 9780898716290.

[8] C. A. R. Vera Tudela. "Formulações alternativas do mec para problemas elastodinâmicos de mecânica da fratura com o uso da função de green numérica". Tese de doutorado. COPPE/UFRJ, 2003.

