Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Flexágonos: propostas didáticas para o ensino de Geometria

Nara Bobko[1], Patrícia M. Kitani[2], William J. Hirt[3]
PROFMAT-CT/UTFPR, Curitiba, PR

Resumo. O uso de materiais concretos é uma estratégia importante no ensino de matemática, especialmente em geometria. Neste contexto, os flexágonos tem proeminente relevância pois são materiais muito instigantes e envolvem muitos conceitos matemáticos. Além disso podem ser construídos com materiais acessíveis e de baixo custo. As possibilidades do uso deste dispositivo para enriquecer o processo de ensino e aprendizagem são muitas. Neste trabalho, são apresentadas quatro propostas didáticas que exemplificam o uso do flexágono como material concreto para o ensino de geometria. As propostas foram elaboradas com base em diferentes conceitos geométricos e diferentes formas de explorar os flexágonos, visando fornecer ao leitor abordagens diversas e inspirá-lo a explorar outras possibilidades.

Palavras-chave. Flexágonos, Ensino de Geometria, Atividades Didáticas, GeoGebra.

1 Introdução

Flexágonos são objetos flexíveis com a forma de polígonos regulares, construídos a partir de certas dobras (e colagens) em uma folha de papel. Embora sejam semelhantes aos origamis, a grande diferença dos flexágonos é que o polígono resultante, apesar de plano, é flexível. Isto é, é possível manipular a dobradura de forma a alternar entre duas faces sempre visíveis (frente e verso), enquanto o restante permanece oculto [2]. A Figura 1 ilustra o movimento de um flexágono, chamado de Trihexaflexáno.

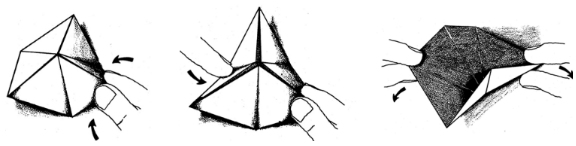

Figura 1: Ilustração do Movimento do Trihexaflexágono. Fonte: adaptado de Gardner [4].

A flexibilidade destes objetos, permitindo a alternância das faces aparentes, é um aspecto muito intrigante. Além disso, o processo de construção e a própria manipulação dos flexágonos podem conduzir a descobertas e questionamentos envolvendo conceitos matemáticos. Portanto, os flexágonos apresentam grande potencial como materiais concretos para o ensino de diversos conceitos matemáticos, especialmente em relação à Geometria.

O uso de materiais concretos no ensino de matemática e geometria está alinhado com as competências e habilidades previstas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [3] onde consta a importância de "induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais (...)" . Nesse sentido, a utilização de materiais concretos como os flexágonos podem

[1]narabobko@utfpr.edu.br
[2]kitani@utfpr.edu.br
[3]william_hirt@hotmail.com

contribuir significativamente para o aprendizado, permitindo que os estudantes manipulem e explorem o material de maneira lúdica e intuitiva. Além disso, os flexágonos são de fácil construção e baixo custo, tornando-se uma opção acessível e prática para o uso em sala de aula.

Com base nisso foram desenvolvido pelos autores, no escopo da dissertação de mestrado do PROFMAT: *Explorando Geometria com auxílio de Flexágonos* [5], quatro propostas didáticas que serão abordadas aqui. Estas propostas didáticas exemplificam o uso do flexágono como material concreto para o ensino de Geometria. Visando facilitar a compreensão das propostas, será introduzido na Seção 2 um breve histórico dos flexágonos, a estrutura das nomenclaturas destes dispositivos além da explicação da construção de um flexágono como exemplo. Na Seção 3, serão detalhadas as propostas didáticas em questão.

2 Flexágonos

O estudo dos flexágonos surgiu por acaso, em 1939, com o estudante inglês Arthur H. Stone [4]. Ao recortar folhas de fichário americanos para adequar ao tamanho do seu fichário inglês, sobraram tiras de papel. Ele então começou a dobrar estas tiras de papel de diversas formas, e uma delas acabou sendo particularmente interessante por poder ser flexionada e assim apresentar uma face escondida. Foi desta maneira inusitada que surgiu o primeiro flexágono.

Existem diversos tipos de flexágonos, que variam tanto no formato quanto na quantidade de faces. A nomenclatura utilizada é composta pela palavra "flexágono"como radical e dois prefixos: um para indicar o número de lados do polígono que cada face do flexágono forma, e outro para indicar o número de faces. Por exemplo, o flexágono mostrado na Figura 1, criado por Stone, possui três faces e formato hexagonal (6 lados), por isso é denominado de Trihexaflexágono. Também é possível construir flexágonos de formato hexagonal com 4, 5 ou 6 faces, denominados Tetrahexaflexágono, Pentahexaflexágono e Hexahexaflexagono, respectivamente. Ou ainda, um flexágono de formato quadrado com quatro faces, o Tetratetraflexágono (Figura 2) [2, 5].

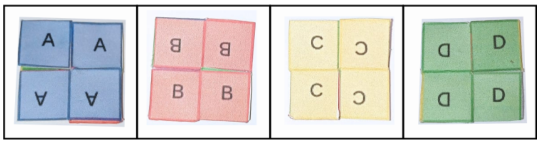

Figura 2: As quatro faces de um Tetratetraflexágono de papel. Fonte: autoria própria.

A construção do Trihexaflexágono pode ser realizada como descrito a seguir. Desenhar 10 triângulos equiláteros em uma tira de papel, conforme lado esquerdo da Figura 3. A fim de facilitar a compreensão do resultado final, os triângulos são coloridos na frente e no verso conforme Figura 3.

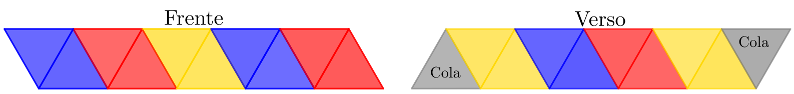

Figura 3: Molde colorido de um flexágono. Fonte: Bobko [1].

Em seguida, dobra-se a tira de papel conforme a Figura 4, onde a linha com traços indica dobra do tipo vale, enquanto a linha com traços e pontos indica dobra do tipo montanha. Mais detalhes desta construção deste (e de outros flexágonos) podem ser encontradas em [2].

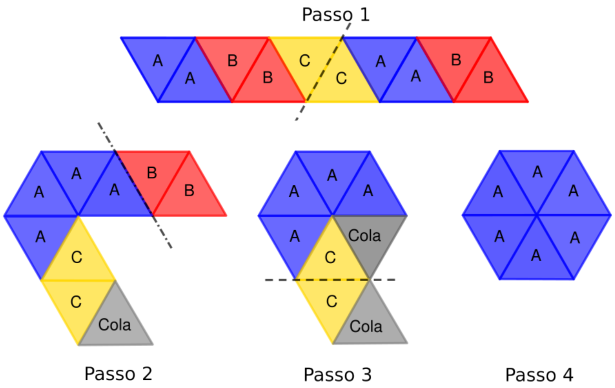

Figura 4: Dobradura do Trihexaflexágono. Fonte: Bobko [1].

Será obtido então um hexágono com uma face azul (frente) e outra face vermelha (verso). Cada face possuirá três fendas que atravessam internamente o flexágono da frente para o verso. Flexionando o hexágono de forma a evidenciar estas fendas (arestas com fenda para frente e as demais para trás), é possível alterar as faces visíveis para amarela (frente) e azul (verso) (Figura 5).

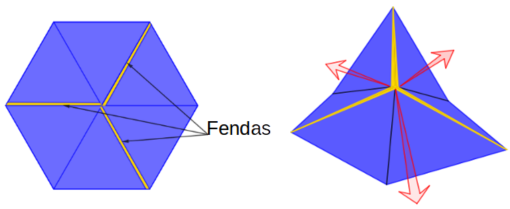

Figura 5: Ilustração do movimento de flexão. Fonte: Bobko [1].

3 Atividades Didáticas

Existem muitos conceitos matemáticos da geometria que podem ser explorados com o uso de flexágonos como material concreto lúdico. Existem também diferentes formas de explorá-los. Por exemplo, pode-se utilizar o flexágono pronto ou então estudar conceitos matemáticos envolvidos na construção do seu molde. Aqui são apresentados alguns exemplos de propostas didáticas com o intuito de exemplificar potencialidades e instigar os professores para outras possibilidades. Com esta ideia, as atividades propostas foram elaboradas explorando diferentes conceitos geométricos, diferentes abordagens do flexágono, bem como diferentes instrumentos de geometria (tanto manuais como tecnológicos). Vale ressaltar a importância de que os estudantes tenham contato com esses instrumentos desde cedo, de forma a desenvolverem habilidades motoras finas e a compreenderem a importância do uso adequado dos mesmos. Além disso, o uso de recursos tecnológicos, como softwares de matemática dinâmica, podem enriquecer o processo de ensino e aprendizagem, possibilitando a exploração de conceitos de forma visual e interativa.

As propostas serão apresentadas de forma resumida e com pequenas adaptações em relação às propostas originais. Informações mais completas, fichas de atividades, lista de exercícios para complementação e relatos de execução de algumas das propostas, podem ser encontradas na dissertação de mestrado do PROFMAT: *Explorando Geometria com auxílio de Flexágonos* [5].

Todas as atividades propostas foram elaboradas considerando-se um tempo de execução de aproximadamente 100 minutos. Na descrição das atividades considerou-se a realização individual da mesma, mas a critérios do professor bem como disponibilidade de recursos, tais atividades poderão ser realizadas em grupos. As propostas foram direcionadas a diferentes níveis de ensino: as propostas I e III para o 7^o e o 8^o ano do ensino fundamental; a proposta II para o 6^o ano do ensino fundamental e a última proposta voltada ao ensino médio.

3.1 Proposta I

Esta proposta visa consolidar conceitos geométricos de posições relativas de retas e de relações entre ângulos. Para tal, é utilizado como material guia a construção do desenho do molde do Trihexaflexágono (Figura 3). Para o desenvolvimento da atividade, cada estudante deverá ter em mãos uma folha de papel, lápis, régua, compasso, transferidor, tesoura sem ponta e cola. A execução da atividade pelos estudantes será conduzida pelo docente conforme instruções a seguir.

Passo 1: Construir duas retas paralelas r_1 e r_2 com 4cm de distância entre elas.

Passo 2: Com o auxílio do transferidor, construir uma reta t_1 transversal a r_1 segundo um ângulo de 60^o, obtendo os pontos A e B, interseções da reta t_1 com as retas r_1 e r_2, respectivamente.

Passo 3: Com auxílio do compasso, usar a medida do segmento AB e marcar 5 pontos na reta r_1, partindo de A, e cinco pontos na reta r_2, partindo de B, conforme Figura 6.

Passo 4: Usar os pontos marcados para formar 10 triângulos equiláteros, lado a lado.

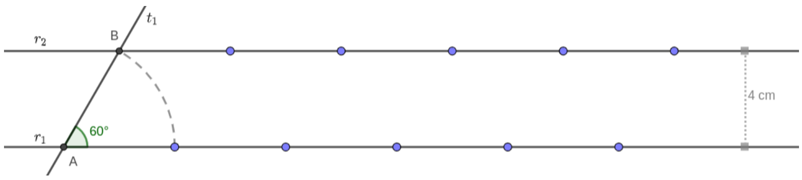

Figura 6: Construção de molde para o Trihexaflexágono. Fonte: autoria própria.

Nos passos 1 e 2 o professor poderá explorar os conceitos de posições relativas de retas (paralelas e transversais). Além disso, no Passo 2 poderão ser explorados os conceitos de relações entre ângulos (adjacentes, complementares, opostos pelo vértice, correspondentes, alternos, internos e externos). Para finalizar a atividade, os alunos poderão montar e manipular o Trihexaflexágono. Caso o professor queira outro enfoque, poderá trocar os passos 1 e 2, e construir inicialmente dois triângulos equiláteros congruentes formando um losango. Neste caso a medida do lado poderá ser fornecida e a partir destes triângulos, traçar as retas paralelas r_1 e r_2, e recaindo nos passos 4 e 5.

3.2 Proposta II

Através da molde do Trihexaflexágono pronto, esta proposta visa explorar e consolidar os conceitos de perímetro de polígonos, classificação de triângulos (equilátero, isósceles e escaleno), ângulos internos de um triângulo equilátero e área de polígonos usando triângulos como unidade. Para a realização da atividade, cada estudante deverá ter em mãos um molde impresso do Trihexaflexágono, lápis, régua e transferidor. O desenvolvimento da atividade será conduzido pelo professor orientando os estudantes conforme passos descritos a seguir.

Passo 1: Com auxílio da régua, medir o comprimento dos lados dos triângulos e observar que os triângulos são equiláteros pois possui três lados iguais. Consolidar a classificação dos triângulos quanto a medida dos lados (equilátero, isósceles e escaleno).

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0054

Passo 2: Apresentar (ou relembrar) a definição de perímetro de um polígono e pedir aos alunos que calculem o perímetro de um dos triângulos.

Passo 3: Com auxílio de um transferidor, medir os três ângulos internos de um dos triângulos e generalizar para os alunos que todos os triângulos equiláteros terão esta propriedade. Em seguida, explorar com os estudantes que a soma dos ângulos internos resultará em um ângulo de 180^o, comentando que isto ocorrerá para todos os triângulos.

Passo 4: Instruir os estudantes para colorir o molde conforme Figura 3. Questioná-los quanto a quantidade de triângulos presentes na faixa para auxiliá-los a visualizar que a faixa possui 10 unidades de áreas (triangulares). Salientar neste momento que dos 20 triângulos pintados (frente e verso) apenas 18 estarão coloridos.

Passo 5: Orientar os estudantes para a montagem do Trihexaflexágono e ensiná-los como realizar o movimento de flexão.

Passo 6: Auxiliá-los a observar a disposição das cores: cada face do hexágono regular é formada por seis triângulos equiláteros de mesma cor. Ou seja, a área do hexágono regular é seis vezes a área do triângulo equilátero. Contrapor com as observações anteriores sobre a a quantidade de triângulos pintados na faixa antes da montagem.

Por fim, o professor poderá explicar a nomenclatura do Trihexaflexágono e deixar os alunos explorarem a flexão do material produzido.

3.3 Proposta III

Assim como a primeira proposta, esta irá explorar o molde de um flexágono. Todavia, optou-se pela utilização do software de matemática dinâmica GeoGebra [6] pois este possibilita movimentar partes da construção realizada, permitindo observar, conjecturar e explorar propriedades da construção. Nesta atividades serão explorados propriedades do triângulo equilátero, do losango e do trapézio. Para esta atividade os estudantes precisarão ter acesso ao software Geogebra. A síntese das orientações que o professor deverá efetuar para o desenvolvimento da atividade segue abaixo.

Passo 1: Construir no GeoGebra Clássico os pontos $A(0, 0)$ e $B(2, 0)$. Em seguida construir um triângulo equilátero passando por A e B usando a ferramenta *Polígono Regular*. Para tal lembrar os estudantes que um triângulo equilátero é um polígono regular de 3 lados.

Passo 2: Utilizando a ferramenta *Ângulo*, observar que as medidas dos três ângulos do triângulo são iguais.

Passo 3: Com a ferramenta *Distância, Comprimento ou Perímetro*, observar o comprimento dos lados do triângulo dados pelos segmentos AB, BC e AC. Usar esta mesma ferramenta para clicar no polígono e obter seu perímetro. Com estes dados, o professor pode auxiliar os estudantes a compararem o valor da soma das medidas dos lados com o valor do perímetro.

Passo 4: Movimentar o ponto B e observar as alterações nas medidas dos lados bem como no resultado do perímetro do triângulo.

Passo 5: Utilizar a opção *Criar uma nova Ferramenta* para facilitar a construção de novos triângulos congruentes ao já existente. Para tal definir como *Objetos Iniciais* os pontos A e B e como *Objetos Finais* o ponto C e o polígono regular já criado.

Passo 6: Clicar no botão da nova ferramenta (que aparecerá na barra de ferramentas) e selecionar o ponto C e depois o ponto B. Então um triângulo BCD será formado sendo congruente ao anterior e com a aresta CB em comum. Formalizar aos alunos que $ABDC$ forma um quadrilátero chamado de losango. Com as ferramentas do GeoGebra, explorar as propriedades básicas do losango (quatro lados iguais, ângulos internos opostos congruentes e ângulos internos adjacentes suplementares).

Passo 7: Usar novamente a ferramenta criada passando como entrada os pontos B e D. Explorar com os alunos o trapézio $AEDC$ formado e estimulá-los a verificar, com auxílio do software, que as bases deste polígono são paralelas e que os ângulos internos adjacentes a uma mesma base são iguais.

Passo 8: Proceder como no passo anterior, mas agora com os pontos D e E, formando o paralelogramo $AEFC$. Estudar as propriedades do paralelogramo.

Passo 9: Usar novamente a ferramenta criada, nas devidas posições, até obter o molde do Pentahexaflexágono (disponível no livro virtual "Flexágonos" [2]).

Após a construção da malha, poderá ser realizada a impressão e a montagem do Pentahexaflexágono para que os estudantes possam explorar.

3.4 Proposta IV

Esta proposta visa explorar elementos que compõem os polígonos e poliedros (face, arestas ou lados, vértices, ângulos internos e externos) através do cálculo da característica de Euler. Mais informações sobre a característica de Euler podem ser encontradas na dissertação de Hirt [5]. Com o intuito de estimular a abstração e o raciocínio lógico, a atividade foi planejada de forma a iniciar com formas geométricas bem conhecidos do aluno (triângulo, quadrado e hexágono), progredindo para um objeto mais complexo mas ainda de domínio deles (cilindro), até um objeto desconhecido (flexágono). Para esta atividade cada estudante deverá ter em mãos um Trihexaflexágono pronto, um molde do Trihexaflexágono, duas tiras de papel, tesoura e cola. O resumo dos passos que o professor deverá conduzir para o desenvolvimento desta atividade é apresentado a seguir.

Passo 1: Apresentar os elementos de um polígono (vértices, lados e região interna) e os elementos de um poliedro (vértices, arestas e faces). Em seguida, apresentar a definição da Característica de Euler para poliedros ($\chi = V - A + F$) e explicar que pode-se utilizá-la para polígonos tomando os lados como arestas e a região interna como face.

Passo 2: Pedir aos alunos para calcularem a Característica de Euler para o triângulo, o quadrado e o hexágono. Salientar que, do ponto de vista topológico, estes polígonos são parecidos e, por isso, possuem a Característica de Euler.

Passo 3: Explicar como calcular a Característica de Euler de um polígono usando uma triangulação deste. Aplicar esta ideia para o hexágono e comparar com o resultado obtido anteriormente (Figura 7).

Passo 4: Instruir para construírem um cilindro e uma Faixa de Möbius usando as tiras de papel. Salientar aos alunos que o cilindro e a faixa de Möbius não são poliedros. Em seguida, comparar estas duas estruturas com respeito a semelhanças e diferenças. Mostrar aos alunos que o cilindro tem interior e exterior bem definidos enquanto a Faixa de Möbius não.

Passo 4: Instruir os alunos a traçar uma geratriz AB do cilindro e recortar sobre esta linha, transformando-o num retângulo de vértices AABB. Em seguida, triangularizar este retângulo e calcular a Característica de Euler (Figura 7). Reforçar os alunos para não contarem duas vezes arestas ou vértices repetidos (que no cilindro estavam na mesma posição).

Passo 5: Similar ao procedimento feito para o cilindro, planificar a Faixa de Möbius, triangularizar e calcular sua Característica de Euler (Figura 7).

Passo 6: A partir do molde do Trihexaflexágono, calcular sua Característica de Euler (Figura 7).

Passo 7: Comparar a Característica de Euler de todos as figuras geométricas exploradas, concluindo que, topologicamente, o Trihexaflexágono se assemelha mais a um cilindro ou a Faixa de Möbius do que com um hexágono.

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0054

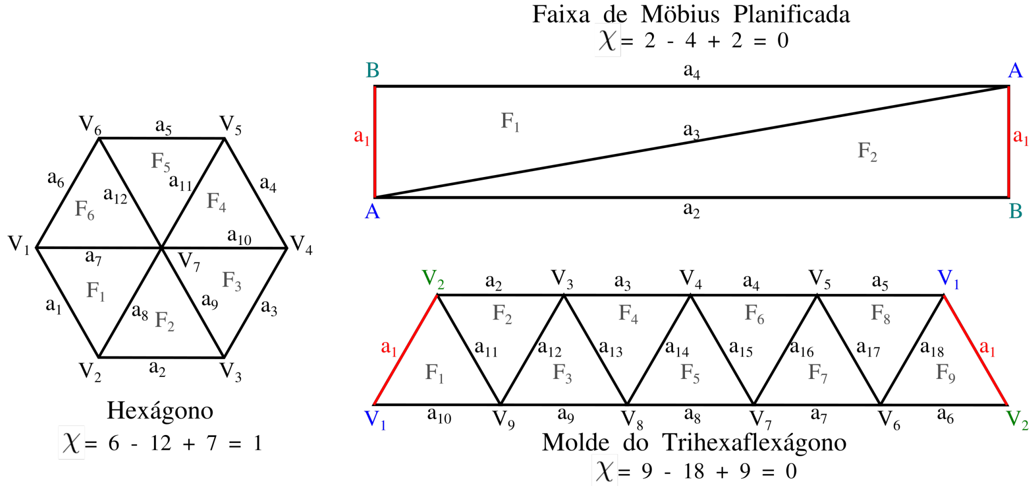

Figura 7: Característica de Euler: Hexágono, Faixa de Möbius e Trihexaflexágono. Fonte: autoria própria.

4 Considerações Finais

Os flexágonos são uma ferramenta de ensino poderosa e divertida para explorar conceitos matemáticos, em particular de geometria. De uma maneira concreta e visual, potencializam o interesse e entusiasmo pelo conteúdo, permitindo uma compreensão mais profunda e duradoura dos mesmos.

Agradecimentos

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

[1] N. Bobko, P. M. Kitani e W. J. Hirt. “Flexágonos”. Em: **Revista do Professor de Matemática** 8 (2020), pp. 83–94. DOI: `10.21711/2319023x2020/pmo86`.

[2] N. Bobko, P. M. Kitani e W. J. Hirt. **Livro Virtual Flexágonos**. Online. Acessado em 03/03/2023, `http://www.geogebra.org/m/ggk5gwkj`.

[3] Brasil. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Acessado em 03/03/2023, `http://basenacionalcomum.mec.gov.br`. MEC, 2018.

[4] Martin Gardner. **Hexaflexagons, Probability Paradoxes and the Tower of Hanoi**. Cambridge: Cambridge University Press, 2008, pp. 1–15.

[5] W. J. Hirt. **Explorando Geometria com auxílio de Flexágonos**. Dissertação de mestrado. Curitiba, PR, Brasil, 2019.

[6] International GeoGebra Institute. **GeoGebra Classic**. Online. Versão 6.0. Acessado em 06/03/2023, `https://www.geogebra.org/classic`.

