Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo Numérico do Método Híbrido Primal em Problemas Quase-incompressíveis

Giovanni Taraschi[1]
Programa de Doutorado em Matemática Aplicada - IMECC/Unicamp, Campinas, SP
Maicon Ribeiro Correa[2]
Departamento de Matemática Aplicada - IMECC/Unicamp, Campinas, SP

Resumo. Neste trabalho exploramos a aplicação do Método Híbrido Primal (MHP) em malhas de quadrados para a aproximação de problemas quase-incompressíveis de elasticidade linear. Em nossos experimentos numéricos, o MHP com o espaço de aproximação de mais baixa ordem mostrou-se robusto, apresentando o mesmo nível de acurácia em problemas compressíveis e quase-incompressíveis. O mesmo não pode ser dito para espaços de mais alta ordem, para os quais os erros na aproximação aumentam conforme nos aproximamos do limite de incompressibilidade.

Palavras-chave. Método de Elementos Finitos, Elasticidade Linear, Método Híbrido Primal, Problemas quase-incompressíveis

1 Elasticidade linear e o limite de incompressibilidade

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e ocupado por um corpo elástico. O problema da elasticidade linear consiste em encontrar o campo deslocamento $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})) = \boldsymbol{f} \quad \text{em} \quad \Omega \tag{1a}$$
$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \tag{1b}$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ denota a parte simétrica do gradiente de $\boldsymbol{u}$. As funções vetoriais $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ e $\boldsymbol{g} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega, \mathbb{R}^2)$ são dados do problema que descrevem a carga aplicada sobre o corpo elástico e as condições de contorno de Dirichlet, respectivamente. As propriedades físicas do material elástico são descritas pelo tensor de quarta ordem, uniformemente positivo definido e simétrico $\boldsymbol{C}$, chamado de tensor de Elasticidade.

Para o caso particular de problemas isotrópicos, o tensor de Elasticidade $\boldsymbol{C}$ pode ser escrito em função dos coeficientes de Lamé $\mu > 0$ e $\lambda \geq 0$ de acordo com

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{S} = 2\mu\boldsymbol{S} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{S})\boldsymbol{I}, \quad \forall \boldsymbol{S} \in \mathbb{S}, \tag{2}$$

onde $\mathbb{S}$ denota o espaço dos tensores 2×2 simétricos. Os coeficientes de Lamé estão relacionados ao módulo de elasticidade $E > 0$ e à constante de Poisson $0 \leq \nu < 0.5$ pelas seguintes expressões

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{3}$$

Dizemos que um problema isotrópico em elasticidade linear é quase-incompressível quando ν tende à 0.5, o que resulta em λ tender à infinito, tornando o tensor $\boldsymbol{C}$ não limitado.

[1]gitaraschi@gmail.com
[2]maicon@ime.unicamp.br

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0047

Alguns métodos clássicos de Elementos Finitos, como o amplamente utilizado método de Galerkin $H^1(\Omega)$-conforme, falham no limite de incompressibilidade, em um fenômeno chamado *"locking"* [2, 6]. Faz-se então necessário o desenvolvimento de métodos mais sofisticados, capazes de fornecer boas aproximações mesmo neste cenário mais desafiador. Exemplos de tais métodos podem ser encontrados, por exemplo, em [4, 6, 8].

O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento do método de elementos finitos Híbrido Primal [1, 5, 9, 10] no limite de incompressibilidade. Para este estudo inicial, nos restringimos ao caso em que Ω é particionado em malhas compostas por quadrados, e avaliaremos o desempenho do método em dois problemas teste usando três espaços de aproximação diferentes.

2 Método Híbrido Primal para a elasticidade linear

Considere $\mathcal{T}_\mathrm{h}$ uma partição de Ω em sub-domínios disjuntos chamados de elementos. Para cada elemento $K \in \mathcal{T}_\mathrm{h}$, considere $H^1(K,\mathbb{R}^2)$ o espaço de funções vetoriais tais que cada componente pertence ao espaço de Sobolev $H^1(K)$, $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega,\mathbb{R}^2)$ o espaço composto pelo traço das funções em $H^1(K,\mathbb{R}^2)$ e $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega,\mathbb{R}^2)$ o espaço dual de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega,\mathbb{R}^2)$. Sobre a partição $\mathcal{T}_\mathrm{h}$, também chamada de malha, definimos os seguintes espaços vetoriais

$$\boldsymbol{X}(\mathcal{T}_\mathrm{h},\mathbb{R}^2) = \left\{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^2) \,:\, \boldsymbol{v}|_K \in H^1(K,\mathbb{R}^2),\, \forall K \in \mathcal{T}_\mathrm{h}\right\}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}(\mathcal{T}_\mathrm{h},\mathbb{R}^2) = \Bigg\{\boldsymbol{\mu} \in \prod_{K\in\mathcal{T}_\mathrm{h}} H^{-\frac{1}{2}}(\partial K,\mathbb{R}^2) \,:\, \exists\, \boldsymbol{S} \in H(\mathrm{div},\Omega,\mathbb{M}) \text{ tal que}\\ \boldsymbol{S}\boldsymbol{n}^{\partial K} = \boldsymbol{\mu} \text{ sobre } \partial K,\, \forall K \in \mathcal{T}_\mathrm{h}\Big\},\end{aligned} \tag{5}$$

onde $\boldsymbol{n}^{\partial K}$ é a normal unitária exterior à ∂K e $H(\mathrm{div},\Omega,\mathbb{M})$ denota o espaço das funções tensoriais 2×2 tais que cada componente, assim como o divergente tomado linha a linha, são quadrado integráveis.

A formulação variacional híbrida primal para o problema (1) consiste em encontrar o campo deslocamento $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{X}$ e o multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{M}$ tais que

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_\mathrm{h}} \int_K \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{dx} - \sum_{K\in\mathcal{T}_\mathrm{h}} \int_{\partial K} \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{ds} = -\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{dx} \qquad \forall\,\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}, \tag{6a}$$

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_\mathrm{h}} \int_{\partial K} \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{ds} = \sum_{e\in\mathcal{B}} \int_e \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{g}\,\mathrm{ds} \quad \forall\,\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{M}, \tag{6b}$$

onde $\mathcal{B}$ denota o conjunto das arestas de $\mathcal{T}_\mathrm{h}$ que estão na fronteira $\partial\Omega$ e as integrais sobre ∂K devem ser entendidas como o produto de dualidade entre $H^{\frac{1}{2}}(\partial K,\mathbb{R}^2)$ e $H^{-\frac{1}{2}}(\partial K,\mathbb{R}^2)$.

Para obter o Método Híbrido Primal (MHP), devemos substituir os espaços $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{M}$ em (6) por sub-espaços de dimensão finita $\boldsymbol{X}_h \subset \boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{M}_h \subset \boldsymbol{M}$. A escolha de tais espaços deve satisfazer determinadas condições de compatibilidade, de forma a garantir a existência e unicidade do problema discreto associado [5, 7, 9]. Baseados na análise desenvolvida em [9, 10], apresentamos agora algumas escolhas compatíveis em malhas compostas por quadriláteros convexos.

Dada $\mathcal{T}_\mathrm{h}$ uma malha quadrilateral, segue que para cada $K \in \mathcal{T}_\mathrm{h}$ existe um isomorfismo bilinear F_K tal que

$$K = F_K(\hat{K}), \tag{7}$$

onde $\hat{K} = [-1,1]\times[-1,1]$ é chamado de elemento de referência. Sobre o elemento de referência $\hat{K}$, definimos o espaço $Q_r(\hat{K})$, composto pelos polinômios em $\hat{K}$ com grau igual ou menor a r em cada uma das coordenadas. Denotamos por $Q_r^+(\hat{K})$ o espaço gerado pelas combinações lineares dos polinômios de $Q_r(\hat{K})$ mais uma função v_0 dada por

$$v_0(\hat{x}_1,\hat{x}_2) = [\hat{x}_1(1-\hat{x}_1) - \hat{x}_2(1-\hat{x}_2)][(\hat{x}_1(1-\hat{x}_1))^{\frac{r-1}{2}} + (\hat{x}_2(1-\hat{x}_2))^{\frac{r-1}{2}}]$$

para r impar, e

$$v_0(\hat{x}_1,\hat{x}_2) = [\hat{x}_1(1-\hat{x}_1) - \hat{x}_2(1-\hat{x}_2)](2\hat{x}_1-1)(2\hat{x}_2-1)[(\hat{x}_1(1-\hat{x}_1))^{\frac{r-2}{2}} + (\hat{x}_2(1-\hat{x}_2))^{\frac{r-2}{2}}]$$

para r par. Definimos também o espaço $E_m(\partial\hat{K})$, composto pelas funções sobre $\partial\hat{K}$ que, quando restritas a cada aresta de $\hat{K}$, são polinômios de grau igual ou menor a m.

A partir dos espaços $Q_r^+(\hat{K})$ e $E_m(\partial\hat{K})$, e usando os isomorfismos F_K, podemos definir os seguintes espaços sobre os elementos geométricos $K \in \mathcal{T}_\mathrm{h}$

$$\mathcal{Q}_r^+(K,\mathbb{R}^2) = \left\{\boldsymbol{v} \in H^1(K,\mathbb{R}^2) \,:\, \boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{v}} \circ F_K^{-1} \,,\, \hat{\boldsymbol{v}} \in Q_r^+(\hat{K}) \times Q_r^+(\hat{K})\right\}, \tag{8}$$

$$\mathcal{E}_m(\partial K,\mathbb{R}^2) = \left\{\boldsymbol{\mu} \in L^2(\partial K,\mathbb{R}^2) \,:\, \boldsymbol{\mu} = \hat{\boldsymbol{\mu}} \circ F_K^{-1} \,,\, \hat{\boldsymbol{\mu}} \in E_m(\partial\hat{K}) \times E_m(\partial\hat{K})\right\}. \tag{9}$$

Finalmente, os espaços de aproximação globais $\boldsymbol{X}_h$ e $\boldsymbol{M}_h$ são construídos de acordo com

$$\boldsymbol{X}_h = \mathcal{Q}_{m+1}^+(\mathcal{T}_\mathrm{h},\mathbb{R}^2) = \left\{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^2) \,:\, \boldsymbol{v}|_K \in \mathcal{Q}_{m+1}^+(K,\mathbb{R}^2)\,,\, \forall K \in \mathcal{T}_\mathrm{h}\right\}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{M}_h = \mathcal{E}_m(\mathcal{T}_\mathrm{h},\mathbb{R}^2) = \Big\{\boldsymbol{\mu} \in \prod_{K\in\mathcal{T}_\mathrm{h}} \mathcal{E}_m(\partial K,\mathbb{R}^2) \,:\, \boldsymbol{\mu}|_{\partial K_1} + \boldsymbol{\mu}|_{\partial K_2} = 0 \text{ sobre } K_1 \cap K_2, \text{ para todo par de elementos adjacentes } K_1, K_2 \in \mathcal{T}_\mathrm{h}\Big\}. \tag{11}$$

Segue que os espaços $\boldsymbol{X}_h \times \boldsymbol{M}_h = \mathcal{Q}_{m+1}^+(\mathcal{T}_\mathrm{h},\mathbb{R}^2) \times \mathcal{E}_m(\mathcal{T}_\mathrm{h},\mathbb{R}^2)$ são compatíveis para todo inteiro $m \geq 0$. Fazendo uso destes espaços, garantimos a existência e unicidade de solução para o MHP.

3 Experimentos Numéricos

Nesta seção, utilizamos o MHP com os espaços de aproximação $\mathcal{Q}_{m+1}^+(\mathcal{T}_\mathrm{h},\mathbb{R}^2) \times \mathcal{E}_m(\mathcal{T}_\mathrm{h},\mathbb{R}^2)$ para resolver problemas quase-incompressíveis de elasticidade linear. São propostos dois problemas teste. O primeiro problema, proposto anteriormente em [3], é obtido tomando $\Omega = (-1,1)\times(-1,1)$, fixando $\mu = 1$ e escolhendo

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \pi^2 \begin{bmatrix} 4\sin(2\pi y)(1-2\cos(2\pi x)) + \cos(\pi(x+y)) - \frac{2}{1+\lambda}\sin(\pi x)\sin(\pi y) \\ 4\sin(2\pi x)(2\cos(2\pi y)-1) + \cos(\pi(x+y)) - \frac{2}{1+\lambda}\sin(\pi x)\sin(\pi y) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Para $\boldsymbol{g} = 0$, que corresponde a condições homogêneas de Dirichlet, a solução exata é dada por

$$\boldsymbol{u}(x,y) = \begin{bmatrix} \sin(2\pi y)(\cos(2\pi x)-1) + \frac{1}{1+\lambda}\sin(\pi x)\sin(\pi y) \\ \sin(2\pi x)(1-\cos(2\pi y)) + \frac{1}{1+\lambda}\sin(\pi x)\sin(\pi y) \end{bmatrix}. \tag{13}$$

No segundo problema teste, fixamos novamente $\mu = 1$ mas agora tomamos $\Omega = (0,1)\times(0,1)$. Como solução exata para o problema, adotamos o campo

$$\boldsymbol{u}(x,y) = \begin{bmatrix} xy\, e^{(x+y)} \\ (1+x)(1-y)\, e^{(x+y)} \end{bmatrix} \tag{14}$$

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0047

e definimos $\boldsymbol{g}$ como o traço de $\boldsymbol{u}$ em $\partial\Omega$. Substituindo (14) em (1a), segue que a expressão de $\boldsymbol{f}$ para que (14) seja de fato solução do problema (1) deve ser

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{bmatrix} (x+y+xy)\, e^{(x+y)} \\ (1-2y-xy)\, e^{(x+y)} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Para ambos os problemas testes, o tensor de elasticidade foi calculado de acordo com (2), e os valores para λ foram obtidos a partir da constante de Poisson. No caso particular em que $\mu = 1$ é mantido fixo, segue de (3) a seguinte expressão para λ

$$\lambda = \frac{2\nu}{1-2\nu}. \tag{16}$$

Foram avaliados três casos, correspondentes a três valores distintos para a constante de Poisson: $\nu = 0.3$, $\nu = 0.5 - 10^{-4}$ e $\nu = 0.5 - 10^{-7}$. Note que a primeira escolha para ν resulta em problemas compressíveis, enquanto as duas últimas se aproximam progressivamente do limite de incompressibilidade.

Para os três casos abordados e em ambos os problemas teste, foram obtidas soluções aproximadas $(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{m}_h)$ usando partições de Ω compostas por $n \times n$ quadrados, com n variando de 16 à 128. Foram utilizados os espaços de aproximação $\mathcal{Q}^+_{m+1}(\mathcal{T}_{\mathrm{h}}, \mathbb{R}^2) \times \mathcal{E}_m(\mathcal{T}_{\mathrm{h}}, \mathbb{R}^2)$ com $m = 0$, 1 e 2. Os erros $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h$ para a aproximação do deslocamento foram medidos na norma L^2, enquanto os erros $\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_h$ foram medidos utilizando a seguinte norma em $\boldsymbol{M}$

$$\|\mu\|_{\boldsymbol{M}} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{\mathrm{h}}} h_K \|\mu\|^2_{0,\partial K} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{17}$$

onde h_K denota o diâmetro do elemento K. Os resultados encontrados para os erros, assim como suas respectivas taxas de convergência, são apresentados nas Tabelas 1 a 3.

Tabela 1: Resultados para ambos os problemas teste usando o espaço $\mathcal{Q}^+_1(\mathcal{T}_{\mathrm{h}}, \mathbb{R}^2) \times \mathcal{E}_0(\mathcal{T}_{\mathrm{h}}, \mathbb{R}^2)$.

	Primeiro problema teste				Segundo problema teste			
	$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_0$		$\|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}_h\|_{\boldsymbol{M}}$		$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_0$		$\|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}_h\|_{\boldsymbol{M}}$	
n	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa
Caso $\nu = 0.3$ ($\lambda = 1.5$)								
16	1.110e-01	2.09	8.625e+00	1.16	4.215e-03	2.00	7.714e-01	1.01
32	2.766e-02	2.01	4.231e+00	1.03	1.054e-03	2.00	3.850e-01	1.00
64	6.912e-03	2.00	2.106e+00	1.01	2.635e-04	2.00	1.924e-01	1.00
128	1.728e-03	2.00	1.052e+00	1.00	6.587e-05	2.00	9.618e-02	1.00
Caso $\nu = 0.5 - 10^{-4}$ ($\lambda \approx 5 \cdot 10^3$)								
16	1.086e-01	2.01	8.683e+00	1.19	3.548e-03	2.00	7.743e-01	1.02
32	2.721e-02	2.00	4.228e+00	1.04	8.866e-04	2.00	3.854e-01	1.01
64	6.806e-03	2.00	2.101e+00	1.01	2.216e-04	2.00	1.925e-01	1.00
128	1.702e-03	2.00	1.049e+00	1.00	5.540e-05	2.00	9.619e-02	1.00
Caso $\nu = 0.5 - 10^{-7}$ ($\lambda \approx 5 \cdot 10^6$)								
16	1.086e-01	2.01	8.683e+00	1.19	3.548e-03	2.00	7.743e-01	1.02
32	2.721e-02	2.00	4.228e+00	1.04	8.866e-04	2.00	3.854e-01	1.01
64	6.806e-03	2.00	2.101e+00	1.01	2.216e-04	2.00	1.925e-01	1.00
128	1.702e-03	2.00	1.049e+00	1.00	5.540e-05	2.00	9.619e-02	1.00

Tabela 2: Resultados para ambos os problemas teste usando o espaço $\mathcal{Q}_2^+(\mathcal{T}_\mathrm{h},\mathbb{R}^2)\times\mathcal{E}_1(\mathcal{T}_\mathrm{h},\mathbb{R}^2)$.

	Primeiro problema teste				Segundo problema teste			
	$\lVert \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\rVert_0$		$\lVert \boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}_h\rVert_{\boldsymbol{M}}$		$\lVert \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\rVert_0$		$\lVert \boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}_h\rVert_{\boldsymbol{M}}$	
n	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa
Caso $\nu = 0.3$ ($\lambda = 1.5$)								
16	9.314e-03	2.75	1.769e+00	1.68	4.577e-05	2.89	1.886e-02	2.14
32	1.285e-03	2.86	4.205e-01	2.07	5.975e-06	2.94	4.429e-03	2.09
64	1.667e-04	2.95	9.742e-02	2.11	7.645e-07	2.97	1.066e-03	2.05
128	2.105e-05	2.98	2.362e-02	2.04	9.672e-08	2.98	2.611e-04	2.03
Caso $\nu = 0.5-10^{-4}$ ($\lambda \approx 5\cdot 10^3$)								
16	2.094e-02	3.53	5.715e+01	1.29	9.090e-05	3.31	1.219e+00	2.60
32	1.703e-03	3.62	1.083e+01	2.40	8.294e-06	3.45	2.095e-01	2.54
64	1.777e-04	3.26	1.582e+00	2.78	8.777e-07	3.24	3.656e-02	2.52
128	2.133e-05	3.06	2.267e-01	2.80	1.038e-07	3.08	6.419e-03	2.51
Caso $\nu = 0.5-10^{-7}$ ($\lambda \approx 5\cdot 10^6$)								
16	9.507e-02	2.07	4.922e+02	-0.98	5.195e-04	1.99	8.419e+02	2.70
32	2.018e-02	2.24	8.392e+02	-0.77	8.205e-05	2.66	1.449e+02	2.54
64	1.812e-03	3.48	5.382e+02	0.64	1.188e-05	2.79	2.514e+01	2.53
128	8.029e-05	4.50	1.199e+02	2.17	1.434e-06	3.05	4.421e+00	2.51

Tabela 3: Resultados para ambos os problemas teste usando o espaço $\mathcal{Q}_3^+(\mathcal{T}_\mathrm{h},\mathbb{R}^2)\times\mathcal{E}_2(\mathcal{T}_\mathrm{h},\mathbb{R}^2)$.

	Primeiro problema teste				Segundo problema teste			
	$\lVert \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\rVert_0$		$\lVert \boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}_h\rVert_{\boldsymbol{M}}$		$\lVert \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\rVert_0$		$\lVert \boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}_h\rVert_{\boldsymbol{M}}$	
n	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa	err.	taxa
Caso $\nu = 0.3$ ($\lambda = 1.5$)								
16	3.631e-04	3.96	6.486e-02	3.04	1.226e-07	3.99	7.517e-05	3.03
32	2.289e-05	3.99	8.058e-03	3.01	7.699e-09	3.99	9.326e-06	3.01
64	1.434e-06	4.00	1.006e-03	3.00	4.822e-10	4.00	1.163e-06	3.00
128	8.969e-08	4.00	1.256e-04	3.00	3.017e-11	4.00	1.452e-07	3.00
Caso $\nu = 0.5-10^{-4}$ ($\lambda \approx 5\cdot 10^3$)								
16	4.376e-04	3.94	1.195e-01	3.07	1.296e-07	4.03	1.031e-03	3.75
32	2.765e-05	3.98	1.939e-02	2.62	8.208e-09	3.98	1.013e-04	3.35
64	1.732e-06	4.00	3.289e-03	2.56	5.259e-10	3.96	1.057e-05	3.26
128	1.082e-07	4.00	4.337e-04	2.92	3.353e-11	3.97	1.078e-06	3.29
Caso $\nu = 0.5-10^{-7}$ ($\lambda \approx 5\cdot 10^6$)								
16	4.378e-04	3.94	1.207e-01	3.06	1.292e-07	4.04	8.388e-01	4.00
32	2.767e-05	3.98	2.066e-02	2.55	8.048e-09	4.00	5.243e-02	4.00
64	1.735e-06	4.00	4.379e-03	2.24	5.388e-10	3.90	3.277e-03	4.00
128	1.085e-07	4.00	1.035e-03	2.08	1.576e-10	1.77	2.051e-04	4.00

Para o espaço de mais baixa ordem ($m = 0$), vemos pela Tabela 1 que o MHP se mostrou robusto nos cenários quase-incompressíveis para ambos os problemas teste. Tanto na aproximação de $\boldsymbol{u}$ quanto na aproximação de $\boldsymbol{m}$, vemos que os erros não aumentam conforme ν se aproxima de 0.5, mostrando que a mesma precisão observada no caso compressível ($\nu = 0.3$) se mantém nos casos quase-incompressíveis ($\nu = 0.5-10^{-4}$ e $\nu = 0.5-10^{-7}$). Para o caso de malhas triangulares, foi provado em [1] que o MHP de mais baixa ordem é robusto para problemas próximos ao limite

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0047

de incompressibilidade. Os resultados apresentados aqui sugerem que essa boa performance pode também se estender para partições em quadrados.

Para $m = 1$, que corresponde ao espaço de segunda ordem $\mathcal{Q}_2^+(\mathcal{T}_\mathrm{h}, \mathbb{R}^2) \times \mathcal{E}_1(\mathcal{T}_\mathrm{h}, \mathbb{R}^2)$, o MHP se mostrou mais instável. Para a aproximação de $\boldsymbol{u}$ os erros aumentam conforme ν tende à 0.5. Esse aumento é sutil no primeiro problema teste e um pouco mais severo no segundo. Ainda assim, o método foi capaz de obter aproximações relativamente precisas para o deslocamento nos casos estudados. O problema maior aparece quando analisamos a aproximação de $\boldsymbol{m}$. Pela Tabela 2, vemos que em ambos os problemas testes os erros $\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_h$ aumentam significativamente quando ν se aproxima de 0.5. Comparando os casos $\nu = 0.3$ e $\nu = 0.5 - 10^{-7}$, vemos que os erros $\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_h$ são quatro ordens de magnitude maiores no segundo caso.

Por fim temos os resultados para $m = 3$. Para a aproximação de $\boldsymbol{u}$ as conclusões são semelhantes ao do caso $m = 2$. Os erros aumentam conforme nos aproximamos do limite de incompressibilidade, mas esse aumento é sutil em ambos os problemas. Para a aproximação de $\boldsymbol{m}$ o aumento no tamanho dos erros continua sutil para o primeiro problema teste, e só se torna mais problemático no segundo. Apesar de $m = 3$ não exibir a mesma robusteza observada para $m = 0$, a situação é menos crítica do que para $m = 2$, ao menos para os problemas teste analisados aqui.

4 Conclusões e considerações finais

Para o espaço de aproximação de mais baixa ordem ($m = 0$), os resultados numéricos deste trabalho sugerem que o MHP em malhas de quadrados é robusto no limite de incompressibilidade. Resultados semelhantes a estes foram demonstrados para partições em triângulos em [1]. No entanto, a análise do MHP em quadriláteros é mais delicada do que em triângulos e exige alguns cuidados extras, como destacado em [10]. Por hora, não temos como garantir que os resultados da Tabela 1 possam ser extrapolados para problemas teste diferentes dos abordados aqui ou para partições quadrilaterais mais gerais.

Por outro lado, espaços de maior ordem ($m = 1$ e $m = 2$) não exibiram a mesma robustez e consistência vistas no caso de baixa ordem. Em geral, os erros de aproximação aumentam conforme ν se aproxima de 0.5. Em alguns casos esse aumento é pouco acentuado e não oferece grande prejuízo para a acurácia da solução. Este é o caso, por exemplo, da aproximação de $\boldsymbol{u}$ com o espaço $\mathcal{Q}_3^+(\mathcal{T}_\mathrm{h}, \mathbb{R}^2) \times \mathcal{E}_2(\mathcal{T}_\mathrm{h}, \mathbb{R}^2)$. Em outros cenários o aumento no erro é extremamente severo, provocando resultados proibitivamente imprecisos em problemas quase-incompressíveis, como ocorre na aproximação de $\boldsymbol{m}$ com o espaço $\mathcal{Q}_2^+(\mathcal{T}_\mathrm{h}, \mathbb{R}^2) \times \mathcal{E}_1(\mathcal{T}_\mathrm{h}, \mathbb{R}^2)$. Desenvolvimentos futuros, tanto do ponto de vista numérico como teórico, são necessários para entender completamente o comportamento do MHP com espaços de alta ordem no limite de incompressibilidade.

Agradecimentos

Esse trabalho foi realizado com apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) através dos processos 140400/2021-4 e 304192/2019-8 e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), sob o processo 2013/07375-0.

Referências

[1] Sanjib Kumar Acharya e Kamana Porwal. “Primal hybrid finite element method for the linear elasticity problem”. Em: **Applied Mathematics and Computation** 435 (2022), p. 127462. ISSN: 0096-3003. DOI: 10.1016/j.amc.2022.127462.

[2] Mark Ainsworth e Charles Parker. “Unlocking the secrets of locking: Finite element analysis in planar linear elasticity”. Em: **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** 395 (2022), p. 115034. ISSN: 0045-7825. DOI: 10.1016/j.cma.2022.115034.

[3] Susanne C. Brenner. “A Nonconforming Mixed Multigrid Method for the Pure Displacement Problem in Planar Linear Elasticity”. Em: **SIAM Journal on Numerical Analysis** 30.1 (1993), pp. 116–135. DOI: 10.1137/0730006.

[4] Yuyan Chen e Shuo Zhang. “A conservative stable finite element method for Stokes flow and nearly incompressible linear elasticity on rectangular grid”. Em: **Journal of Computational and Applied Mathematics** 323 (2017), pp. 53–70. ISSN: 0377-0427. DOI: 10.1016/j.cam.2017.04.011. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042717301668.

[5] Maicon R. Correa e Giovanni Taraschi. “Optimal H(div) flux approximations from the Primal Hybrid Finite Element Method on quadrilateral meshes”. Em: **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** 400 (2022), p. 115539. ISSN: 0045-7825. DOI: 10.1016/j.cma.2022.115539.

[6] Peter Hansbo e Mats G. Larson. “Discontinuous Galerkin methods for incompressible and nearly incompressible elasticity by Nitsche’s method”. Em: **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** 191.17 (2002), pp. 1895–1908. ISSN: 0045-7825. DOI: 10.1016/S0045-7825(01)00358-9.

[7] Christopher Harder, Alexandre L. Madureira e Frédéric Valentin. “A hybrid-mixed method for elasticity”. Em: **ESAIM: M2AN** 50.2 (2016), pp. 311–336. DOI: 10.1051/m2an/2015046.

[8] Thiago O. Quinelato et al. “Full H(div)-approximation of linear elasticity on quadrilateral meshes based on ABF finite elements”. Em: **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** 347 (2019), pp. 120–142. ISSN: 0045-7825. DOI: 10.1016/j.cma.2018.12.013.

[9] Pierre-Arnaud Raviart e Jean-Marie Thomas. “Primal hybrid finite element methods for 2nd order elliptic equations”. Em: **Mathematics of computation** 31.138 (1977), pp. 391–413. DOI: 10.2307/2006423.

[10] Giovanni Taraschi e Maicon R. Correa. “On the convergence of the primal hybrid finite element method on quadrilateral meshes”. Em: **Applied Numerical Mathematics** 181 (2022), pp. 552–560. ISSN: 0168-9274. DOI: 10.1016/j.apnum.2022.07.005.

