

Conexão de Equilíbrios e Órbitas Fechadas Hiperbólicas na Fronteira da Região de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Não Lineares

Luís F. C. Alberto¹

EESC-USP, São Carlos, SP

Fabiolo M. Amaral²

IFBA, Eunápolis, BA

Resumo. Neste artigo estudam-se, sob condições de transversalidade e hiperbolicidade, as possibilidades de existência de conexões cíclicas de equilíbrios hiperbólicos e órbitas fechadas hiperbólicas na fronteira da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de um sistema dinâmico contínuo e não linear. A existência destas conexões, sejam homoclínicas ou heteroclínicas, é causa da aparição de conjuntos limites complexos na fronteira da região de estabilidade, e o entendimento delas é fundamental para o desenvolvimento de uma caracterização topológica e dinâmica da fronteira da região de estabilidade.

Palavras-chave. Conexões cíclicas, região de estabilidade, fronteira da região de estabilidade

1 Introdução

O conjunto de condições iniciais cujas órbitas tendem para um ponto de equilíbrio assintoticamente estável (PEAE) quando o tempo tende para o infinito é chamado de área de atração, domínio de atração ou região de estabilidade deste equilíbrio. Usualmente, a região de estabilidade de equilíbrios de sistemas dinâmicos não lineares é um subconjunto do espaço de estados, e determinar ou estimar tal conjunto é relevante em aplicações em diversas áreas das ciências e engenharias [3][2].

A teoria de região de estabilidade desenvolveu-se fortemente para resolver problemas de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência e culminou com o desenvolvimento de uma caracterização topológica e dinâmica da fronteira da região de estabilidade [1]. Esta caracterização estabelece, sob certas suposições de transversalidade e hiperbolicidade, que a fronteira da região de estabilidade é constituída pela união das variedades estáveis de todos os elementos críticos (pontos de equilíbrio e órbitas fechadas hiperbólicas) presentes na fronteira da região de estabilidade. Mais precisamente, se x_i , $i = 1, 2 \dots$ são os pontos de equilíbrio hiperbólicos na fronteira da região de estabilidade e γ_j , $j = 1, 2 \dots$ são as órbitas fechadas hiperbólicas nesta fronteira, então a fronteira topológica da região de estabilidade $A(x^s)$ do PEAE x^s é caracterizada por [1]:

$$\partial A(x^s) = \bigcup_i W^s(x_i) \bigcup_j W^s(\gamma_j) \quad (1)$$

A demonstração desta caracterização se apoia fortemente no fato de que não existem conjuntos limites complexos na fronteira da região de estabilidade, ou seja, todas as órbitas na fronteira da

¹lfcaberto@usp.br

²fabiolo@ifba.edu.br

região de estabilidade convergem para pontos de equilíbrio ou órbitas periódicas hiperbólicas na fronteira da região de estabilidade.

Um artigo recente apontou uma falha na demonstração desta caracterização [4]. Particularmente, o Lemma 3.5 de [1], que foi empregado na demonstração da caracterização, foi demonstrado não ser verdadeiro por meio de um contra exemplo [4]. Este Lema explora a transversalidade de interseções entre as variedades estáveis e instáveis de elementos críticos para concluir sobre as dimensões destas variedades invariantes. Uma consequência deste Lema, se não estivesse errado, seria a não existência de conexões cíclicas de elementos críticos na fronteira da região de estabilidade.

A existência de conjuntos limites complexos na fronteira da região de estabilidade está muito associada à aparição de conexões cíclicas de elementos críticos hiperbólicos nesta fronteira. Neste artigo, estudamos estas conexões cíclicas na fronteira da região de estabilidade. Particularmente, estudamos quais conexões podem e quais não podem ocorrer. Este estudo é fundamental para que uma caracterização correta da fronteira da região de estabilidade possa ser desenvolvida.

2 Região de Estabilidade e Elementos Críticos

Considere o sistema dinâmico:

$$\dot{x} = f(x), \tag{2}$$

com $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável. A solução de (2) passando por x_0 no tempo $t = 0$ é denotada por $\varphi(t, x_0)$. A região de estabilidade $A(x^s)$ de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável x^s é o conjunto:

$$A(x^s) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(t, x) \rightarrow x^s \text{ qd } t \rightarrow \infty\}.$$

A região de estabilidade é um conjunto aberto e invariante [1] e sua fronteira topológica é denotada por $\partial A(x^s)$.

Um ponto de equilíbrio x^* é hiperbólico se $D_x f(x^*)$ não possui autovalores puramente imaginários. Um ponto de equilíbrio hiperbólico x^* é do tipo k se $D_x f(x^*)$ possui exatamente k autovalores com parte real positiva. Um ponto $y \in \mathbb{R}^n$ é periódico se existe $T > 0$ tal que $\varphi(T, y) = y$. O conjunto $\gamma = \{\varphi(t, y) : t \in [0, T]\}$ é chamado de órbita fechada ou periódica do sistema (2). A matriz $D_x \varphi(T, p)$ calculada em qualquer ponto $p \in \gamma$ tem autovalores $1, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$. Os $n-1$ autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ são denominados multiplicadores característicos da órbita fechada. A órbita fechada é hiperbólica se todos os multiplicadores característicos não pertencem ao círculo unitário do plano complexo. Uma órbita fechada hiperbólica é do tipo k se $D_x \varphi(T, p)$ tem exatamente k multiplicadores característicos com $|\lambda| > 1$.

Pontos de equilíbrio e órbitas periódicas serão genericamente denominados elementos críticos. Elementos críticos hiperbólicos possuem conjuntos invariantes chamados variedades estáveis e instáveis. As variedades estáveis e instáveis de um elemento crítico hiperbólico γ são respectivamente definidas por:

$$W^s(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(t, x) \rightarrow \gamma \text{ qd } t \rightarrow \infty\}$$

$$W^u(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(t, x) \rightarrow \gamma \text{ qd } t \rightarrow -\infty\}.$$

Essas variedades são invariantes e se intersectam transversalmente no elemento crítico γ . Se o elemento crítico é um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo k , então $\dim\{W^u\} = k$, e $\dim\{W^s\} = n - k$. Se o elemento crítico é uma órbita fechada do tipo k , então $\dim\{W^u\} = k + 1$ e $\dim\{W^s\} = n - k$. A Figura 1 ilustra uma órbita fechada hiperbólica do tipo-1 em \mathbb{R}^3 , a qual possui variedades estáveis e instáveis de dimensão 2.

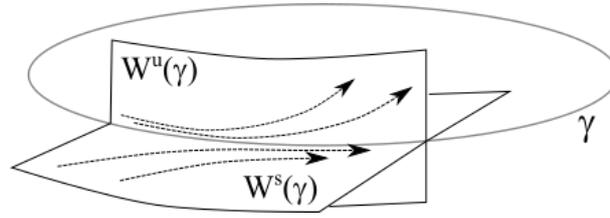


Figura 1: Uma órbita fechada do tipo-1.

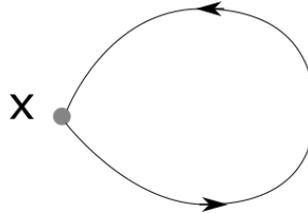


Figura 2: Uma conexão homoclínica de um ponto de equilíbrio hiperbólico.

3 Conexões entre Elementos Críticos

Nesta seção, estudaremos conexões entre elementos críticos. Compreender as conexões entre elementos críticos é de grande relevância para o desenvolvimento da teoria de sistemas dinâmicos e particularmente para o desenvolvimento de uma caracterização da fronteira da região de estabilidade. Essas conexões são estabelecidas pela existência de interseções da variedade instável de um elemento com a variedade estável do mesmo ou de outro elemento crítico. Quando esta interseção é não vazia, existe pelo menos uma órbita conectando ambos elementos críticos, ou seja, a órbita se aproxima do primeiro elemento quando o tempo tende para menos infinito e tende para o segundo elemento quando o tempo tende para o infinito. A existência destas conexões é, em muitos casos, a causa do surgimento de comportamentos complexos em sistemas dinâmicos não lineares.

Interseções de variedades instáveis e estáveis de elementos críticos podem gerar conexões cíclicas entre esses elementos. Está comprovado que a existência desses ciclos geram dinâmicas complexas como soluções caóticas [5].

A conexão cíclica mais simples ocorre quando a variedade instável de um elemento crítico hiperbólico intercepta sua própria variedade estável. Essa conexão é chamada de conexão homoclínica. A Figura 2 ilustra esse cenário quando o elemento crítico é um ponto de equilíbrio hiperbólico. A interseção da variedade instável de um elemento crítico hiperbólico ψ com a variedade estável de um elemento crítico hiperbólico distinto Γ é chamada de conexão heteroclínica. A Figura 3 ilustra essa situação quando os elementos críticos são pontos de equilíbrio hiperbólicos. Uma sequência de conexões heteroclínicas de elementos críticos hiperbólicos ψ_1, ψ_2, \dots ocorre quando a variedade instável de ψ_i intercepta a variedade estável de ψ_{i+1} para cada $i = 1, 2, \dots$, com $\psi_i \neq \psi_j$ para cada

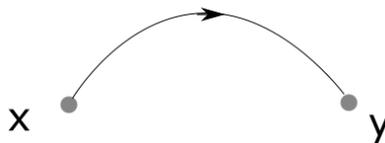


Figura 3: Um conexão heteroclínica entre dois pontos de equilíbrio hiperbólicos.

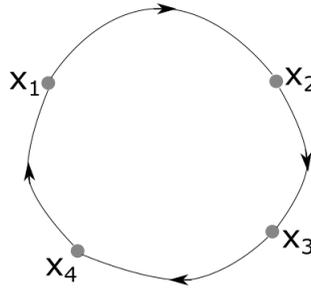


Figura 4: Uma conexão cíclica de quatro pontos de equilíbrio hiperbólicos.

$i \neq j$. A sequência pode ser finita ou não.

Uma conexão cíclica de p pontos de elementos críticos hiperbólicos distintos ψ_1, \dots, ψ_p ocorre quando esses pontos são conectados por meio de uma sequência de conexões heteroclínicas e a variedade instável de ψ_p intercepta a variedade estável de ψ_1 . A Figura 4 ilustra o caso $p = 4$. Se essas interseções são transversais, dizemos que ψ_1, \dots, ψ_p formam uma conexão cíclica transversal.

4 Elementos Críticos Hiperbólicos na Fronteira da Região de Estabilidade

Hiperbolicidade e condições de transversalidade são suficientes para garantir a não existência de conexões cíclicas de pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade. Entretanto, não são suficientes para garantir a não aparição de conexões homoclínicas e conexões cíclicas heteroclínicas de órbitas fechadas hiperbólicas.

Nesta seção, apresentaremos resultados que permitem afirmar, sob certas condições adicionais, que a fronteira da região de estabilidade não admite conexões cíclicas de elementos críticos hiperbólicos. Esses resultados são os passos iniciais para desenvolver uma caracterização da fronteira da região de estabilidade como apresentada em [1], porém sem explorar o Lemma 3.5 de [1], que foi demonstrado ser falso de acordo com [4].

Para isso, as seguintes suposições serão empregadas:

- (B1) Todos os pontos de equilíbrio e órbitas fechadas na fronteira da região de estabilidade $\partial A(x^s)$ são hiperbólicos;
- (B2) As variedades estáveis e instáveis dos pontos de equilíbrio e órbitas fechadas em $\partial A(x^s)$ satisfazem a condição de transversalidade;
- (B3) Toda órbita na fronteira $\partial A(x^s)$ se aproxima de um ponto de equilíbrio ou uma órbita fechada quando $t \rightarrow \infty$, isto é, o conjunto ω -limite de todas as trajetórias na fronteira $\partial A(x^s)$ é um ponto de equilíbrio ou uma órbita fechada.

Os próximo teorema assegura, sob as afirmações (B1) e (B2) a não existência de conexões homoclínicas e conexões cíclicas heteroclínicas de equilíbrios hiperbólicos na fronteira da região de estabilidade.

Teorema 4.1. (Conexões Cíclicas de Equilíbrios) *Seja x^s um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema (2) e suponha que as afirmações (B1) e (B2) sejam satisfeitas, então o sistema (2) não admite conexões homoclínicas, conexões cíclicas e conexões infinitas de pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade $\partial A(x^s)$.*

Demonstração. Sob as afirmações **(B1)** e **(B2)**, todos os pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade são hiperbólicos e suas variedades estáveis e instáveis satisfazem a condição de transversalidade, ou seja, todas as interseções entre essas variedades na fronteira da região de estabilidade são transversais. A inexistência de conexões homoclínicas e conexões heteroclínicas cíclicas decorre trivialmente do fato que se x e y são pontos de equilíbrio hiperbólicos, e $W^u(x)$ e $W^s(y)$ têm uma interseção transversal não trivial, então $\dim\{W^u(y)\} < \dim\{W^u(x)\}$. No caso $x = y$, eliminamos a possibilidade de uma conexão homoclínica, pois em caso de conexão teríamos $\dim\{W^u(x)\} < \dim\{W^u(x)\}$, o que é um absurdo. Como a dimensão da variedade instável diminui à medida que avançamos nas conexões heteroclínicas transversais, não há como fechar ciclos por meio de conexões heteroclínicas de equilíbrios hiperbólicos. Avançando nas conexões, a dimensão diminui de pelo menos uma unidade a cada conexão, e, certamente, atingiríamos, em um número finito de conexões, um ponto de equilíbrio instável do tipo-0 na fronteira da região de estabilidade, o que é um absurdo. Conseqüentemente, também não há conexões heteroclínicas infinitas de pontos de equilíbrio hiperbólicos na fronteira da região de estabilidade. Isto conclui a demonstração. \square

Sob as suposições **(B1)**, **(B2)** e **(B3)**, os Teoremas 4.2 e 4.3 garantem a não existência de conexões homoclínicas e conexões cíclicas heteroclínicas de órbitas fechadas na fronteira da região de estabilidade. Na demonstração desses teoremas recorreremos a um resultado, enunciado nesse trabalho como Lema 4.1, e que é consequência do famoso Teorema de Smale - Birkhoff demonstrado em [6].

Lema 4.1. *Suponha que o sistema (2) admita uma conexão homoclínica transversal de órbitas fechadas ou uma conexão cíclica heteroclínica transversal de órbitas fechadas, então o sistema (2) admite uma órbita que não se aproxima de nenhum elemento crítico quando $t \rightarrow \infty$.*

O teorema a seguir demonstra, sob as suposições **(B1)**, **(B2)** e **(B3)**, a não existência de conexões homoclínicas de órbitas fechadas na fronteira da região de estabilidade.

Teorema 4.2. (Conexões Homoclínicas de Órbitas Fechadas) *Seja x^s um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema (2) e suponha que as afirmações **(B1)**, **(B2)** e **(B3)** sejam satisfeitas, então o sistema (2) não admite conexões homoclínicas de órbitas fechadas na fronteira da região de estabilidade $\partial A(x^s)$.*

Demonstração. Sob a afirmação **(B1)**, todas órbitas fechadas na fronteira da região de estabilidade são hiperbólicas. Suponha que uma órbita fechada hiperbólica admita uma conexão homoclínica na fronteira da região de estabilidade. A afirmação **(B2)** assegura que essa conexão é transversal, então podemos afirmar pelo Lema 4.1 que o sistema (2) admite uma órbita que não se aproxima de nenhum ponto de equilíbrio ou órbita fechada na fronteira $\partial A(x^s)$ quando $t \rightarrow \infty$, violando a afirmação **(B3)**. Logo, chegamos a uma contradição e, portanto, a hipótese da existência de uma órbita fechada com uma conexão homoclínica na fronteira da região de estabilidade é falsa. \square

O teorema a seguir demonstra, sob as suposições **(B1)**, **(B2)** e **(B3)**, a não existência de conexões cíclicas heteroclínicas de órbitas fechadas na fronteira da região de estabilidade.

Teorema 4.3. (Conexões Cíclicas Heteroclínicas de Órbitas Fechadas) *Seja x^s um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema (2) e suponha que as afirmações **(B1)**, **(B2)** e **(B3)** sejam satisfeitas, então o sistema (2) não admite conexões cíclicas heteroclínicas de órbitas fechadas na fronteira da região de estabilidade $\partial A(x^s)$.*

Demonstração. Sob a afirmação **(B1)**, todas órbitas fechadas na fronteira da região de estabilidade são hiperbólicas. Suponha a existência de uma conexão cíclica heteroclínica de órbitas fechadas na fronteira da região de estabilidade $\partial A(x^s)$. A afirmação **(B2)** assegura que essas conexões são transversais, então pelo Lema 4.1 podemos afirmar que o sistema (2) admite uma órbita que

não se aproxima de nenhum ponto de equilíbrio ou órbita fechada na fronteira $\partial A(x^s)$ quando $t \rightarrow \infty$, violando a afirmação **(B3)**. Logo, chegamos a uma contradição e, portanto, a hipótese da existência de uma conexão heteroclínica de órbitas fechadas na fronteira da região de estabilidade é falsa. \square

5 Considerações Finais

Neste artigo, condições suficientes para assegurar a não existência de conexões cíclicas homoclinicas e heteroclínicas de elementos críticos na fronteira da região de estabilidade de um sistema dinâmico não linear foram desenvolvidas. Sob estas condições, não existem comportamentos complexos na fronteira, tais como órbitas caóticas, no sentido de que toda trajetória na fronteira da região de estabilidade obrigatoriamente converge para um ponto de equilíbrio ou para uma órbita fechada. Estes resultados são fundamentais para o futuro desenvolvimento de uma caracterização topológica e dinâmica da fronteira da região de estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares.

Agradecimentos

Os resultados deste artigo são fruto de projetos de pesquisa parcialmente financiados pela FAPESP (Processo 2018/20104-9) e CNPq (Processo 312040/2021-0).

Referências

- [1] H. -. Chiang, M. W. Hirsch e F. F. Wu. “Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems”. Em: **IEEE Transactions on Automatic Control** 33.1 (1988), pp. 16–27.
- [2] H. D. Chiang. **Direct Methods for Stability Analysis of Electric Power Systems: Theoretical Foundation, BCU Methodologies, and Applications**. Wiley, 2011.
- [3] Hsiao-Dong Chiang e Luís Fernando Costa Alberto. **Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems: Theory, Estimation, and Applications**. Cambridge University Press, 2015. ISBN: 9781107035409.
- [4] Michael W. Fisher e Ian A. Hiskens. “Comments on “Stability Regions of Nonlinear Autonomous Dynamical Systems””. Em: **IEEE Transactions on Automatic Control** 66.12 (2021), pp. 6194–6196. DOI: 10.1109/TAC.2021.3061674.
- [5] John Guckenheimer e Philip Holmes. **Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields**. Applied Mathematical Sciences (AMS, volume 42), 1983.
- [6] J. Palis. “On Morse-Smale dynamical systems”. Em: **Topology** 8 (1969), pp. 385–405.