

# Bifurcações na Interação de Dois Dipolos Magnéticos na Presença de Um Campo Magnético Externo

Marina C. M. dos Santos<sup>1</sup>, Yuri Dumaresq Sobral<sup>2</sup>

Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, DF

**Resumo.** Consideramos dois dipolos magnéticos fixos no plano, livres para girar, separados por uma distância  $r$ , sujeitos a um campo magnético externo homogêneo aplicado com uma certa orientação. Esse sistema é um sistema dinâmico não-linear e o objetivo deste trabalho é determinar e classificar seus pontos de equilíbrio e as bifurcações sofridas pelo sistema causadas por variações da intensidade do campo aplicado. As equações do movimento dos dipolos são obtidas a partir da segunda lei de Newton em termos angulares e dos torques que cada um dos dipolos sofre devido à presença do outro e devido ao atrito de rotação. Mostramos que, dos pontos de equilíbrio obtidos na ausência de um campo magnético externo, apenas dois são estáveis. À medida em que a intensidade do campo externo aplicado varia, o sistema pode sofrer quatro tipos diferentes de bifurcações que podem destruir, criar e mudar a estabilidade destes pontos de equilíbrio. Para altas intensidades, apenas quatro pontos de equilíbrio são observados, dos quais apenas um, associado à orientação dos dipolos na direção do campo aplicado, é estável.

**Palavras-chave.** dipolos magnéticos, pontos de equilíbrio, bifurcações, sistemas dinâmicos.

## 1 Introdução

Neste trabalho, temos interesse em materiais magnéticos (ímãs) e como eles reagem na presença de um campo magnético externo. O primeiro trabalho relevante nessa linha é o de Alfred Marshall Mayer (1836–1897) publicado em 1878 [5]. Em seu trabalho, Mayer estudou configurações de equilíbrio e estabilidade de agulhas imantadas presas a cortiças, boiando em água, sob o efeito de um ímã [7]. Após os experimentos, o autor constatou que, para alguns número de agulhas, poderia haver duas ou mais configurações em diferentes estado de equilíbrio [5].

Como o objetivo do nosso trabalho é estudar a interação de dipolos sob a influência de um campo magnético aplicado, temos alguns trabalhos mais recentes sobre esse assunto. Dentre eles, o trabalho de Laroze et al. [4] no qual foi estudada a dinâmica de interação de duas partículas magnéticas anisotrópicas, via interação dipolo-dipolo, sob a presença de um campo aplicado. Nesta mesma linha, temos o trabalho de Laroze e Vargas [3] sobre a dinâmica de um sistema, sem dissipação, da interação de duas nanopartículas magnéticas sob a influência de um campo magnético aplicado. Além disso, temos o trabalho de Rosa, Cunha e Ceniceros [6] em que estudaram as configurações de equilíbrio de partículas magnéticas com e sem um campo magnético aplicado, utilizando simulações do tipo Monte-Carlo.

Nosso trabalho visa compreender, do ponto de vista matemático, a interação entre dois dipolos magnéticos e as alterações causadas na estrutura desse sistema com a aplicação de um campo magnético externo através de técnicas computacionais aplicadas a sistemas dinâmicos. Procuramos identificar mudanças nos pontos de equilíbrio causadas pela mudança da intensidade do campo magnético externo. Tais mudanças são chamadas de bifurcações. Ao variarmos os parâmetros do

---

<sup>1</sup>marina.merch08@gmail.com

<sup>2</sup>ydsobral@unb.br

sistema, os pontos de equilíbrio podem ter sua estabilidade mudada, novos pontos de equilíbrios podem ser criados ou ainda pontos de equilíbrio podem ser destruídos. As bifurcações estudadas neste trabalho têm como característica ocorrerem quando algum autovalor da matriz jacobiana do sistema se anula, e esses tipos de bifurcações estão associadas à colisão de pontos de equilíbrio [8], que podem causar a destruição e/ou mudança de sua estabilidade.

## 2 Dois Dipolos na Presença de Um Campo Externo

Tomamos o dipolo 1 como origem  $O$  do sistema de coordenadas e a reta que o une com o dipolo 2 como eixo  $x$ , o vetor  $\hat{r}$  como sendo o vetor posição unitário. Os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são, respectivamente, os ângulos de rotação dos dipolos 1 e dipolo 2 em relação ao eixo  $x$  do sistema de coordenadas como visto na Figura 1. O sistema tem um amortecimento  $\xi$  proporcional à velocidade angular dos dipolos, isto é, existe uma resistência ao movimento de rotação dos dipolos causada pelo meio em que os dipolos estão imersos. Esta resistência causa um torque que afeta o movimento de rotação dos dipolos. O sistema está sujeito a um campo externo homogêneo  $\mathbf{B}$  aplicado com uma orientação  $\theta^*$ , isto é,

$$\mathbf{B} = (b \cos \theta^*, b \sin \theta^*). \quad (1)$$

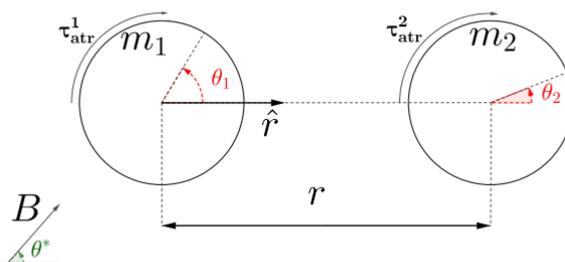


Figura 1: Dois Dipolos na Presença de Um Campo Externo. Fonte: [7].

Pela Segunda Lei de Newton para o movimento angular, o balanço dos torques do sistema para cada dipolo  $i$  é

$$I_i \ddot{\theta}_i = \sum \tau_i = \tau_{mag}^i + \tau_{mag}^{ext} + \tau_{atr}^i. \quad (2)$$

onde  $I_i$  é o momento de inércia do dipolo  $i$ ,  $\tau_{mag}^{ext}$  é o torque magnético externo do campo em cada dipolo,  $\tau_{atr}^i$  é o torque de atrito e  $\tau_{mag}^i$  torque de interação entre os dipolos, com  $i \in \{1, 2\}$ .

Então, o sistema que governa a interação dos dipolos é dado por:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \nu_1 \\ \dot{\theta}_2 = \nu_2 \\ \dot{\nu}_1 = -(2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_1) + \gamma^* \sin(\theta^* - \theta_1) - \xi^* \nu_1 \\ \dot{\nu}_2 = -(2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) + \gamma^* \sin(\theta^* - \theta_2) - \xi^* \nu_2 \end{cases} \quad (3)$$

onde  $\nu_i$  é a velocidade angular do dipolo  $i$ , para  $i \in \{1, 2\}$  e  $\gamma^*, \xi^*$  são parâmetros adimensionais que representam a intensidade do campo externo e a constante de dissipação de energia, respectivamente.

Para análise das bifurcações no sistema (3) precisamos conhecer os pontos de equilíbrio na ausência do campo externo, para isso consideramos  $\gamma^* = 0$ . Procuramos as soluções desse sistema e, por inspeção, temos os seguintes oito pontos de equilíbrio:

$$(0, 0), (0, \pi), (\pi, 0), (\pi, \pi), (3\pi/2, 3\pi/2), (3\pi/2, \pi/2), (\pi/2, \pi/2), (\pi/2, 3\pi/2).$$

Os pontos de equilíbrio podem ser vistos também como as intersecções das equações  $\dot{\nu}_1 = 0$  e  $\dot{\nu}_2 = 0$  representadas na Figura (2).

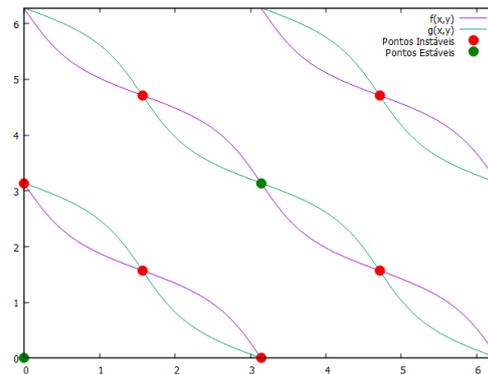


Figura 2: Pontos de equilíbrio do sistema com  $\gamma^* = 0$  representados pela intersecção das equações  $\dot{\nu}_1 = f(x, y) = 0$  e  $\dot{\nu}_2 = g(x, y) = 0$ . A estabilidade dos pontos de equilíbrio é ilustradas pela cor dos pontos.

De acordo com o trabalho anterior [7] os pontos  $(0,0)$  e  $(\pi, \pi)$  são os únicos pontos estáveis do sistema, e através do método Runge-Kutta, com o qual conseguimos achar apenas os pontos estáveis a partir de condições iniciais quaisquer, achamos apenas esses dois pontos. Utilizaremos a notação representada na Tabela 1 para nos referirmos aos pontos de equilíbrio do sistema na ausência do campo externo e, também, aos pontos que derivam desses pontos, na presença do campo externo.

Tabela 1: Notação para representar os pontos de equilíbrio do sistema na ausência do campo externo.

Notação	Ponto de Equilíbrio
$\mathcal{P}_{(0,0)}$	$(0, 0)$
$\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$	$(\pi, \pi)$
$\mathcal{P}_{(\pi,0)}$	$(\pi, 0)$
$\mathcal{P}_{(0,\pi)}$	$(0, \pi)$
$\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$	$(\pi/2, \pi/2)$
$\mathcal{P}_{(\pi/2,3\pi/2)}$	$(\pi/2, 3\pi/2)$
$\mathcal{P}_{(3\pi/2,\pi/2)}$	$(3\pi/2, \pi/2)$
$\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$	$(3\pi/2, 3\pi/2)$

### 3 Bifurcações

Para encontrarmos as bifurcações que o sistema sofre à medida em que alteramos o parâmetro  $\gamma^*$ , vamos usar o Método da Continuação [2]. Neste método consideramos sistemas da forma:

$$\mathbf{F}(\lambda, x) = 0, \tag{4}$$

sendo  $\lambda$  é um parâmetro que ao variar, altera a solução do sistema. A equação do método é dada pelo sistema de EDO [2]:

$$x'(\lambda) = - \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(\lambda, x(\lambda)) \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda}(\lambda, x(\lambda)). \tag{5}$$

Com este método, podemos encontrar o valor crítico  $\gamma_c^*$  no qual as bifurcações acontecem. Além disso, com este método, podemos construir o diagrama de bifurcação do sistema. Esta tarefa, porém, não é fácil. Para construirmos os diagramas de bifurcação, apenas o Método de Continuação não é suficiente, pois quando a bifurcação acontece, a matriz jacobiana do sistema é singular e a continuação não pode ser levada adiante.

Assim, para a construção desses gráficos utilizamos três métodos numéricos. O primeiro é o Método da Continuação para determinar o conjunto dos pontos de equilíbrio de  $\gamma^* = 0$  até a primeira bifurcação. O segundo método é o Método Runge-Kutta de 4ª Ordem, utilizado para verificar a estabilidade dos pontos de equilíbrio encontrados, isto é, para cada configuração do sistema, simulamos sua evolução temporal para diversas condições iniciais e verificamos para onde o sistema evoluiu. Finalmente, o Método de Newton–Raphson [1] é usado para determinar o primeiro ponto de equilíbrio depois de alguma bifurcação, para que possamos aplicar novamente o Método da Continuação até uma nova bifurcação. Nos diagramas de bifurcação, indicamos por linha cheia os pontos estáveis e por linha tracejada os pontos instáveis. Além disso, utilizamos o gráfico das interseções das equações de  $\nu_1 = 0$  e  $\nu_2 = 0$  para verificação dos resultados. Utilizamos os dados gerados através da implementação dos métodos numéricos e o software *gnuplot* para elaboração dos gráficos.

Analisaremos, como exemplos, dois casos:

1. Orientação  $\theta^*$  do campo igual à orientação dos dipolos em um ponto instável na ausência de campo, e tomaremos como exemplo  $\theta^* = 3\pi/2$ ;
2. Orientação  $\theta^*$  em um ângulo qualquer, e tomaremos como exemplo  $\theta^* = \pi/20$ .

Para  $\theta^* = 3\pi/2$ , em  $\gamma_c^* = 1$ , na Figura 3, temos uma bifurcação do tipo tridente instável [8] envolvendo três os pontos instáveis:  $\mathcal{P}_{(\pi,0)}$ ,  $\mathcal{P}_{(0,\pi)}$  e  $\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$ . Ao aumentarmos a intensidade do campo externo, os pontos instáveis  $\mathcal{P}_{(\pi,0)}$  e  $\mathcal{P}_{(0,\pi)}$  se movem em direção ao ponto instável  $\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$ . Então, em  $\gamma_c^* = 1$ , os três pontos colidem, restando apenas o ponto instável  $\mathcal{P}_{(\pi/2,\pi/2)}$ .

Em  $\gamma_c^* = 3$ , como pode ser observado na Figura 4, temos a bifurcação tridente supercrítica envolvendo os dois pontos estáveis do sistema,  $\mathcal{P}_{(0,0)}$  e  $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$ , e o ponto instável  $\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$ . Os pontos estáveis  $\mathcal{P}_{(0,0)}$  e  $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$ , à medida em que a intensidade aumenta, migram para o ponto instável  $\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$ . Em  $\gamma_c^* = 3$ , os três pontos colidem, restando apenas  $\mathcal{P}_{(3\pi/2,3\pi/2)}$ , que deixa de ser instável e passa a ser estável.

Um outro exemplo é obtido para  $\theta^* = \pi/20$ . Neste caso, ocorrem quatro bifurcações, ilustradas nas Figuras (5), (7) e (6). Uma delas é uma bifurcação sela-nó [8], que aparece agora de uma forma diferente, com a criação de dois pontos de equilíbrio.

A primeira bifurcação é uma tridente subcrítica, e ocorre em  $\gamma_c^* = 1.02$  envolvendo três pontos,  $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$ ,  $\mathcal{P}_{(\pi/2,3\pi/2)}$  e  $\mathcal{P}_{(3\pi/2,\pi/2)}$ . À medida que aumentamos a intensidade, os pontos  $\mathcal{P}_{(\pi/2,3\pi/2)}$  e  $\mathcal{P}_{(3\pi/2,\pi/2)}$  migram em direção ao ponto  $\mathcal{P}_{(\pi,\pi)}$ . Em  $\gamma_c^* = 1.02$ , os três pontos colidem e os pontos

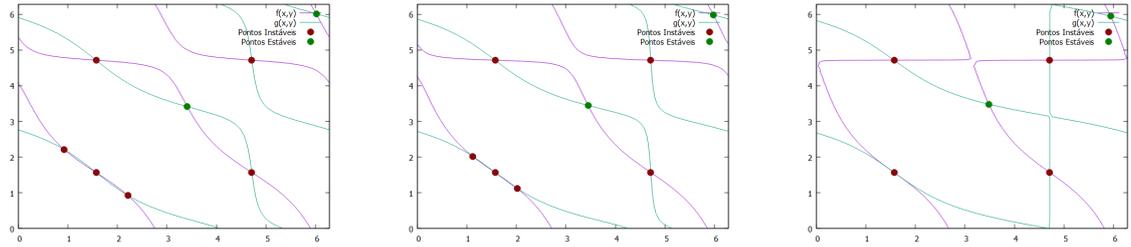


Figura 3: Bifurcação tridente instável em  $\gamma_c^* = 1$  com campo externo na orientação  $\theta^* = 3\pi/2$ . O eixo x representa o ângulo  $\theta_1$  e o eixo y representa o ângulo  $\theta_2$ . Na imagem à esquerda,  $\gamma^* = 0.80$ ; na imagem do centro,  $\gamma^* = 0.90$  e na imagem à direita,  $\gamma^* = 1$ .

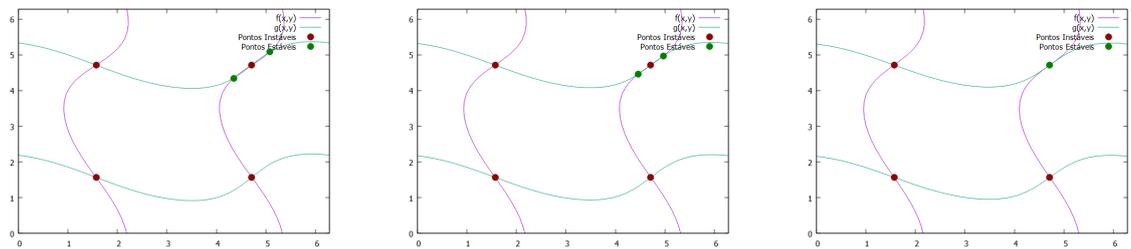


Figura 4: Bifurcação tridente supercrítica em  $\gamma_c^* = 3$  com campo externo na orientação  $\theta^* = 3\pi/2$ . O eixo x representa o ângulo  $\theta_1$  e o eixo y representa o ângulo  $\theta_2$ . Na imagem à esquerda,  $\gamma^* = 2.80$ ; na imagem do centro,  $\gamma^* = 2.90$  e na imagem à direita,  $\gamma^* = 3$ .

$\mathcal{P}_{(\pi/2, 3\pi/2)}$  e  $\mathcal{P}_{(3\pi/2, \pi/2)}$  são destruídos, restando apenas o ponto  $\mathcal{P}_{(\pi, \pi)}$ , que se torna instável. E assim, nessa intensidade, temos seis pontos de equilíbrio no sistema.

A segunda bifurcação é uma tridente instável, com diagrama de bifurcação representado na Figura 5, e que ocorre em  $\gamma_c^* = 1.60$ . A bifurcação envolve três pontos instáveis  $\mathcal{P}_{(3\pi/2, 3\pi/2)}$ ,  $\mathcal{P}_{(\pi, 0)}$  e  $\mathcal{P}_{(0, \pi)}$ . À medida em que a intensidade aumenta, como podemos observar no diagrama de bifurcação na Figura 5, os pontos  $\mathcal{P}_{(0, \pi)}$  e  $\mathcal{P}_{(\pi, 0)}$  se aproximam do ponto  $\mathcal{P}_{(3\pi/2, 3\pi/2)}$ . Em  $\gamma_c^* = 1.60$ , três pontos colidem e os pontos  $\mathcal{P}_{(0, \pi)}$  e  $\mathcal{P}_{(\pi, 0)}$  são destruídos, restando apenas o ponto  $\mathcal{P}_{(3\pi/2, 3\pi/2)}$ , que permanece instável. Nesta intensidade, há quatro pontos de equilíbrio no sistema.

Em  $\gamma_c^* = 1.78$  ocorre uma bifurcação sela-nó, porém agora de maneira um pouco diferente, pois são criados dois novos pontos. Chamamos esses pontos de Ponto Novo 1 e Ponto Novo 2, representados nas Figuras 7 e 6. Deste modo, nessa intensidade, o sistema volta a ter seis pontos de equilíbrio. A última bifurcação, em  $\gamma_c^* = 2.05$ , é uma sela-nó instável na qual dois os pontos instáveis  $\mathcal{P}_{(\pi, \pi)}$  e  $\mathcal{P}_{(\pi/2, \pi/2)}$  colidem e ambos são destruídos. À medida que a intensidade aumenta, esses dois pontos instáveis se movem um em direção ao outro e, em  $\gamma_c^* = 2.05$ , colidem e são ambos destruídos. A partir dessa intensidade, o sistema fica com quatro pontos de equilíbrio, sendo  $\mathcal{P}_{(0, 0)}$  o único estável.

É importante ressaltar que, na Figura 6, apesar de haver um cruzamento dos pontos  $\mathcal{P}_{(\pi, \pi)}$  e Ponto Novo 1 e, também, dos pontos  $\mathcal{P}_{(\pi/2, \pi/2)}$  e Ponto Novo 2, esses cruzamentos não representam novas bifurcações. Esses cruzamentos se dão apenas por causa da projeção no plano do diagrama de bifurcação que é originalmente um gráfico tridimensional, como visto na Figura 7. Os pontos  $\theta_1$  correspondentes a estes pontos de cruzamento são diferentes em cada um dos ramos e portanto, o cruzamento dos ramos não configura uma bifurcação.

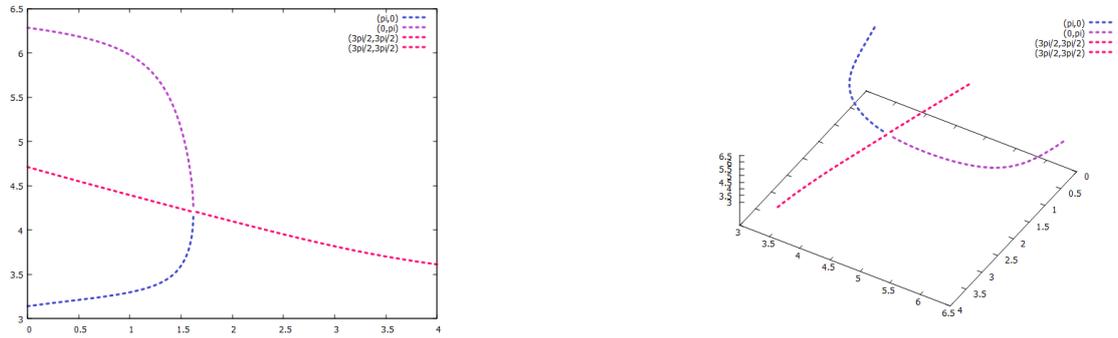


Figura 5: Bifurcação tridente instável com  $\theta^* = \pi/20$ . O primeiro gráfico representa o diagrama de bifurcação em relação a  $\theta_1$ , o eixo y representa  $\theta_1$  e o eixo x representa  $\gamma^*$ . O segundo gráfico representa do diagrama de bifurcação onde o eixo x, eixo da direita, representa  $\gamma^*$ , o eixo y representa  $\theta_1$  e o eixo z representa  $\theta_2$ .

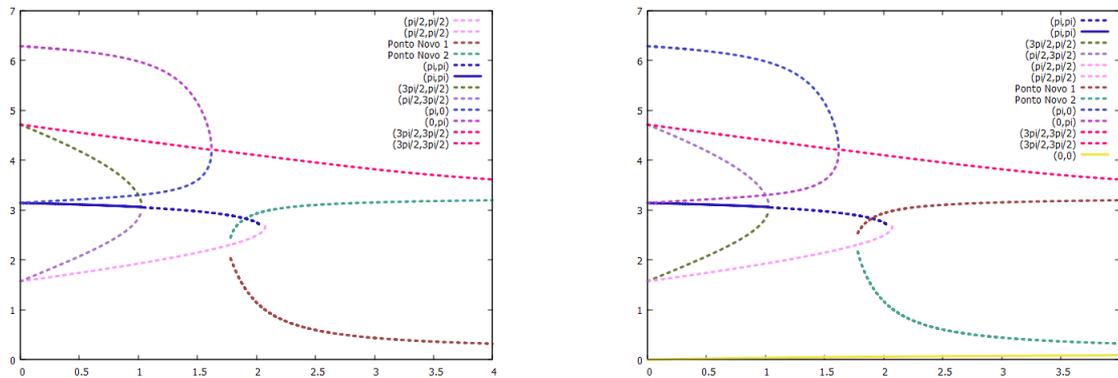


Figura 6: Diagrama de bifurcação com  $\theta^* = \pi/20$ . O primeiro gráfico representa o diagrama de bifurcação em que o eixo x representa  $\gamma^*$ , o eixo y representa  $\theta_1$ . O segundo gráfico representa o diagrama de bifurcação em que o eixo x representa  $\gamma^*$  e o eixo y representa  $\theta_2$ .

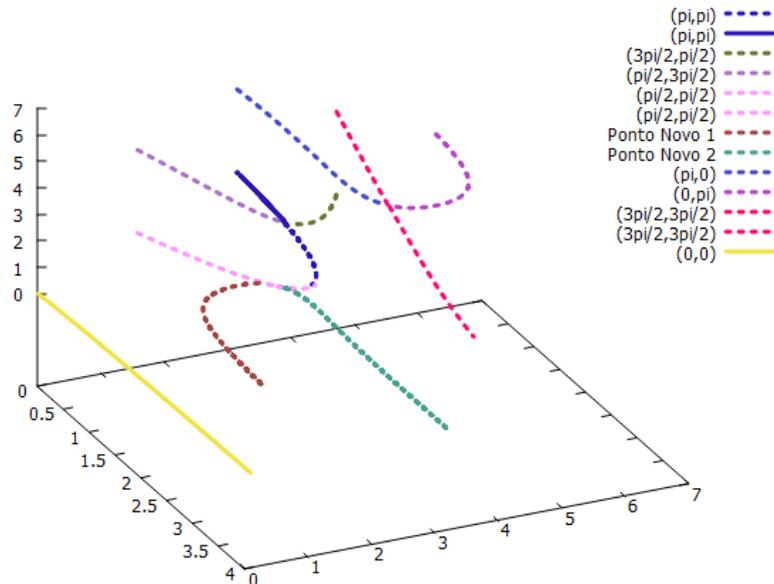


Figura 7: Bifurcações com  $\theta^* = \pi/20$ . O gráfico representa o diagrama de bifurcação. O eixo x, eixo da esquerda, representa  $\gamma^*$ , o eixo y representa  $\theta_1$  e o eixo z representa  $\theta_2$

## 4 Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos a dinâmica da interação entre dois dipolos magnéticos planos, separados a uma distância fixa e livres para girar. Nestas condições, a dinâmica é não-linear e as oscilações do dipolos levam o sistema para uma de duas configurações possíveis: os dois dipolos orientados na direção 0 radianos ou na direção  $\pi$  radianos. Estas duas configurações correspondem aos dois pontos de equilíbrio estáveis do sistema dentre os oito pontos de equilíbrio que identificamos para o sistema.

Identificamos quatro tipos de bifurcações que ocorrem em valores críticos de intensidade do campo aplicado. Neste ponto, o determinante da matriz jacobiana do sistema é nulo. Três dessas bifurcações são dos tipos convencionais (Sela-Nó, Tridente Supercrítica e Tridente Subcrítica) e as outras duas nomeamos de Sela-Nó Instável e Tridente Instável. Observamos que, ao aumentarmos a intensidade do campo magnético externo, o sistema tende a permanecer com quatro pontos de equilíbrio, sendo apenas um estável na direção do campo externo.

## Referências

- [1] Richard L Burden, J Douglas Faires e Annette M Burden. **Numerical analysis**. Cengage learning, 2015.
- [2] EJ Hinch. **Numerical Methods: Think before You Compute: A Prelude to Computational Fluid Dynamics**. Vol. 61. Cambridge University Press, 2020.
- [3] D Laroze e P Vargas. “Dynamical behavior of two interacting magnetic nanoparticles”. Em: **Physica B: Condensed Matter** 372.1-2 (2006), pp. 332–336.
- [4] David Laroze et al. “Dynamics of two interacting dipoles”. Em: **Journal of magnetism and magnetic materials** 320.8 (2008), pp. 1440–1448.
- [5] Alfred M Mayer. “ART. XL.—A note on Experiments with floating Magnets; showing the motions and arrangements in a plane of freely moving bodies, acted on by forces of attraction and repulsion; and serving in the study of the directions and motions of the lines of magnetic force”. Em: **American Journal of Science and Arts (1820-1879)** 15.88 (1878), p. 276.
- [6] Adriano Possebon Rosa, Francisco Ricardo Cunha e Hector Daniel Ceniceros. “On minimal energy dipole moment distributions in regular polygonal agglomerates”. Em: **Journal of Magnetism and Magnetic Materials** 421 (2017), pp. 269–282.
- [7] C. H. M. Santos. “Dinâmica e estabilidade da interação de dois dipolos magnéticos”. Dissertação de mestrado. Departamento de Matemática, UnB, 2019, p. 85.
- [8] S. H. Strogatz. **Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering**. New York: Perseus Books, 1994.