

Aproximação por diferenças finitas da derivada fracionária ψ -Riemann-Liouville

Martha Aurora Parra Pulido¹

UNICAMP, Campinas, SP

J. Vanterler da Sousa Costa²

UEMA, São Luís, MA

E. Capelas de Oliveira³

UNICAMP, Campinas, SP

Resumo. Neste trabalho, discutimos uma aproximação numérica por diferenças finitas para a derivada fracionária de uma função com respeito a ψ , a qual chamamos aproximação *FE* ψ -Riemann-Liouville. Nesse sentido, apresentamos a definição da aproximação, dois exemplos e uma aplicação, a fim de elucidar o resultado apresentado.

Palavras-chave. Derivada fracionária de Riemann-Liouville de uma função com respeito a outra, Aproximação *FE* ψ -Riemann-Liouville, Euler avançado.

1 Introdução

O cálculo fracionário surgiu quase ao mesmo tempo que o cálculo clássico de Newton e Leibniz, no entanto, naquele momento teve pouca atração para os pesquisadores da época. Somente a partir de 1974, após a primeira conferência dedicada ao cálculo fracionário, que este começa a ganhar destaque na comunidade científica. Nos últimos anos, o cálculo fracionário tem se destacado como uma ferramenta muito eficaz para descrever fenômenos complexos [11]. Várias definições de derivadas fracionárias ao longo dos anos foram sendo introduzidas, sendo as mais conhecidas, aquelas de Riemann-Liouville e de Caputo [1, 2, 12, 17–20].

As equações diferenciais de ordem fracionária (EDFs), provaram ser ferramentas valiosas na modelagem de muitos fenômenos em vários campos da ciência e das engenharias [10, 15]. Por exemplo, EDFs podem ser usadas para caracterizar sistemas complexos relacionados à memória e, propriedades hereditárias como deformação viscoelástica, difusão anômala, processamento de sinal e mercado de ações [3, 7, 8, 14].

Por outro lado, a solução numérica de EDFs é um tópico de bastante interesse para diversos pesquisadores. Vários métodos numéricos para resolver EDFs e equações integro-diferenciais fracionárias foram desenvolvidos [4, 5, 9, 13, 21].

Motivado pelas ideias do trabalho [16], onde se discute a aproximação $L1 - 2 \psi$ -Caputo e, do trabalho [6], onde se aproxima a integral de Riemann-Liouville, desenvolvemos uma aproximação para a derivada fracionária de Riemann-Liouville de uma função com respeito a outra. Neste trabalho é apresentada uma aproximação chamada *FE* ψ -Riemann-Liouville.

¹ra211681@ime.unicamp.br

²vanterler@ime.unicamp.br

³capelas@unicamp.br

2 Definições e considerações importantes

Nesta seção, apresentamos duas definições, no caso, a integral fracionária de uma função u com respeito a função ψ e a derivada fracionária de Riemann-Liouville de função u com respeito a função ψ , por vezes chamada derivada fracionária ψ -Riemann-Liouville. Além disso, faremos algumas considerações da malha associada ao problema e apresentamos a definição da aproximação FE ψ -Riemann-Liouville.

Definição 2.1. [12] *Sejam (a, b) $(-\infty \leq a < t < b \leq \infty)$ um intervalo finito ou infinito da reta real \mathbb{R} e $\alpha > 0$. Também, seja $\psi(\cdot)$ uma função crescente e monótona positiva sobre $(a, b]$, com derivada contínua $\psi'(\cdot)$ sobre (a, b) . Então, as integrais fracionárias de uma função u com respeito a outra função ψ sobre $[a, b]$, à esquerda e à direita, são definidas por:*

$$I_a^{\alpha;\psi} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(\xi)(\psi(t) - \psi(\xi))^{\alpha-1} u(\xi) d\xi, \tag{1}$$

e

$$I_b^{\alpha;\psi} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \psi'(\xi)(\psi(\xi) - \psi(t))^{\alpha-1} u(\xi) d\xi, \tag{2}$$

respectivamente, onde $\Gamma(\cdot)$ é a função gama.

Definição 2.2. [12] *Sejam $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $I = [a, b]$ o intervalo $(-\infty \leq a < t < b \leq \infty)$, $\psi(t)$ uma função crescente e $\psi'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. As derivadas fracionárias de Riemann-Liouville, à esquerda e à direita, de uma função u com respeito a ψ de ordem α , são dadas por*

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_a^{\alpha;\psi} u(t) &= \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n I_a^{n-\alpha;\psi} u(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \psi'(\xi)(\psi(t) - \psi(\xi))^{n-\alpha-1} u(\xi) d\xi, \end{aligned} \tag{3}$$

e,

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_b^{\alpha;\psi} u(t) &= \left(-\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n I_b^{n-\alpha;\psi} u(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b \psi'(\xi)(\psi(\xi) - \psi(t))^{n-\alpha-1} u(\xi) d\xi, \end{aligned} \tag{4}$$

respectivamente, onde $n = [\alpha] + 1$, com $[\alpha]$ sendo a parte inteira de α .

Por outro lado, consideremos uma malha uniforme com pontos t_0, t_1, \dots, t_N de um intervalo $[a, b]$, onde Δt será a amplitude do passo, $t_k = k\Delta t$ para $0 < k \leq N$ e u uma função contínua em $[a, b]$. O método de Euler avançado (FE) para a aproximação da derivada de primeira ordem da função u no intervalo $[t_{j-1}, t_j]$, $1 \leq j \leq N$, é dado por

$$D^+ u(t_j) = \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{\Delta t}. \tag{5}$$

A aproximação apresentada a seguir, surge como resultado do uso do método de Euler avançado para aproximar a derivada que aparece na Eq.(3) como discutido em [16] e definindo a função $u(t)$, dada por

$$u(t) = u(t_j), \quad \text{para todo } t \in [t_j, t_{j+1}),$$

segundo a ideia apresentada em [6] na aproximação da integral de Riemann-Liouville.

Definição 2.3. *Sejam $0 < \alpha < 1$, $I = [a, b]$, $u \in C(I, \mathbb{R})$, $\psi(t)$ uma função crescente tal que $\psi'(t) \neq 0$ e $\mathbb{D}_{t_0}^{\alpha; \psi} u(t) \in C(I, \mathbb{R})$ para todo $t \in I$. Dada uma malha uniforme de pontos t_0, t_1, \dots, t_N do intervalo I , tal que $t_0 = a$, $t_k = k\Delta t$ para $0 < k \leq N$, onde Δt é a amplitude de passo. A aproximação FE ψ -Riemann-Liouville de u no ponto t_k de ordem α , é dada por*

$$\mathbb{D}_{t_0}^{\alpha; \psi} u(t) \Big|_{t=t_k} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\psi'(t_k)\Delta t} \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} u(t_j) [(\psi(t_{k+1}) - \psi(t_j))^{1-\alpha} - (\psi(t_{k+1}) - \psi(t_{j+1}))^{1-\alpha} - (\psi(t_k) - \psi(t_j))^{1-\alpha} + (\psi(t_k) - \psi(t_{j+1}))^{1-\alpha}] + u(t_k)(\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k))^{1-\alpha} \right\}.$$

3 Casos particulares da derivada ψ -Riemann-Liouville

A fim de exemplificarmos, consideramos dois casos particulares da derivada fracionária ψ -Riemann-Liouville, dos quais aproximamos a solução usando a aproximação da Definição 2.3. No primeiro caso, temos a derivada fracionária de Hadamard, isto é, quando $\psi(t) = \ln(t)$. Para isso, calculamos a derivada fracionária ψ -Riemann-Liouville de ordem α da função $u(t) = t^{3+\alpha}$ com $\alpha = 0,5$ usando a aproximação FE ψ -Riemann-Liouville, onde a solução analítica é dada por

$$\mathbb{D}_0^{\alpha; \ln(t)} u(t) = \mathbb{D}_0^{\alpha; \ln(t)} t^{3+\alpha} = \left(t \frac{d}{dt} \right) I_0^{1-\alpha; \ln(t)} t^{3+\alpha} = (3 + \alpha)^\alpha t^{3+\alpha}.$$

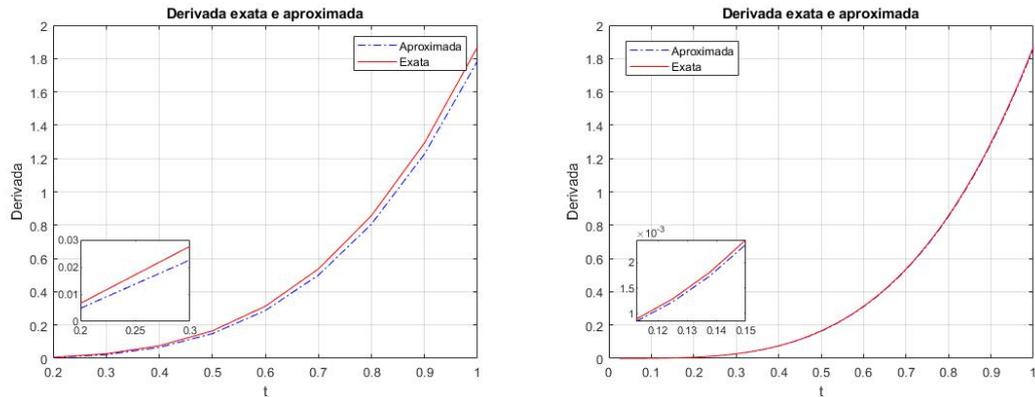


Figura 1: Derivada exata e aproximada da derivada fracionária de Hadamard da função $u(t) = t^{3+\alpha}$ com $\alpha = 0,5$, $\Delta t = 1/10$ (esquerda) e $\Delta t = 1/80$ (direita).

A Figura 1 mostra os resultados numéricos obtidos quando usada a aproximação apresentada, com $\psi(t) = \ln(t)$, $u(t) = t^{3+\alpha}$, $\alpha = 0,5$. Onde dois espaçamentos de malha $\Delta t = 1/10$ e $\Delta t = 1/80$ foram usados.

Na Tabela 1 foram registrados os erros usando a norma infinito, as taxas de erro do caso de Hadamard para dois valores do parâmetro α ($\alpha = 0,5$ e $\alpha = 0,8$) e o tempo computacional.

Δt	$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,8$	
	Erro $\ \cdot\ _\infty$	T. Conv.	Erro $\ \cdot\ _\infty$	T. Conv.
0,10000	8,47483e-02	1,17081	2,41879e-01	1,07340
0,05000	3,73574e-02	1,18179	1,11073e-01	1,12278
0,02500	1,66116e-02	1,16921	5,01696e-02	1,14662
0,01250	7,50572e-03	1,14612	2,24906e-02	1,15749
0,00625	3,45351e-03	1,11993	1,00542e-02	1,16152
0,00313	1,61695e-03	1,09479	4,49388e-03	1,16177
0,00156	7,68691e-04	1,07280	2,01128e-03	1,15985
0,00078	3,70044e-04	1,05471	9,02208e-04	1,15658

Tabela 1: Erro e taxa de convergência da derivada de Hadamard da função $u(t) = t^{3+\alpha}$ para $\alpha = 0,5$ e $\alpha = 0,8$.

No segundo caso, apresentamos a derivada fracionária de Katugampola, isto é, quando $\psi(t) = t^\rho$, $\rho > 0$. Agora calculamos a derivada fracionária ψ -Riemann-Liouville de ordem $\alpha = 0,6$ da função $u(t) = e^{3t}$. A derivada fracionária ψ -Riemann-Liouville é dada por

$$\mathbb{D}_0^{\alpha;t^\rho} u(t) = \frac{1}{\rho t^{\rho-1}} \frac{d}{dt} I_0^{1-\alpha;t^\rho} e^{3t} = \frac{1}{\rho t^{\rho-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} \frac{d}{dt} I_0^{1-\alpha;t^\rho} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+\rho}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+\rho-\alpha\rho}{\rho}\right)} t^{k-\alpha\rho}.$$

A Figura 2 apresenta os resultados numéricos comparando à solução exata e à solução aproximada

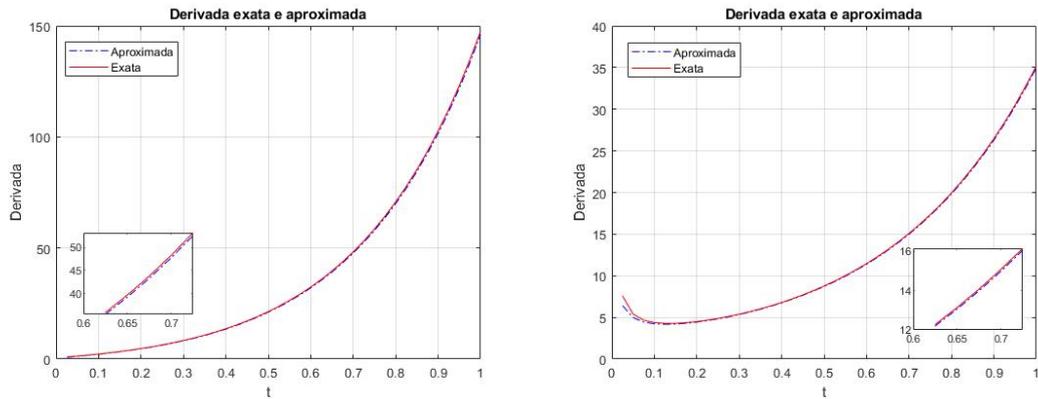


Figura 2: Derivada exata e aproximada da derivada de Katugampola, com $\alpha = 0,6$, $\Delta t = 1/40$, e $\rho = 0,1$ (esquerda) e $\rho = 1,2$ (direita).

usando a Definição 2.2, representando o caso $\psi(t) = t^\rho$, onde $\rho = 0,1$ e $\rho = 1,2$, $\alpha = 0,6$ e $u(t) = e^{3t}$. As duas figuras são apresentadas com o mesmo espaçamento de malha $\Delta t = 1/40$.

Na Tabela 2 são exibidos os erros e taxas de convergência para o segundo caso, usando os mesmos valores dos parâmetros da Figura 2.

$\alpha = 0,6$	$\rho = 0,1$		$\rho = 1,2$	
	Erro $\ \cdot\ _\infty$	T. Conv.	Erro $\ \cdot\ _\infty$	T. Conv.
0,10000	7,93036e+00	1,13565	1,40681e+00	1,22870
0,05000	3,47079e+00	1,19212	5,65391e-01	1,31511
0,02500	1,49769e+00	1,21253	2,18605e-01	1,37092
0,01250	6,46532e-01	1,21194	8,21471e-02	1,41204
0,00625	2,81517e-01	1,19950	3,00837e-02	1,44923
0,00313	1,24161e-01	1,18101	1,06955e-02	1,49198
0,00156	5,55377e-02	1,16067	3,64233e-03	1,55407
0,00078	2,51627e-02	1,14218	1,14609e-03	1,66814

Tabela 2: Erro e taxa de convergência da derivada de Katugampola para $\alpha = 0,6$, $\rho = 0,1$ e $\rho = 1,2$.

4 Aplicação

Nesta seção, apresentamos uma aplicação usando a aproximação por diferenças finitas da Definição 2.3. Para isto, construímos um sistema de equações lineares usando a aproximação da seguinte forma:

$$D_{t_0}^{\alpha;\psi} u(t) \Big|_{t=t_k} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\psi'(t_k)\Delta t} \left\{ \sum_{j=1}^k a_{k,j} u_{j-1} + b_k u_k, \right\} \quad (6)$$

onde, $a_{k,j} = (\psi_{k+1} - \psi_{j-1})^{1-\alpha} - (\psi_{k+1} - \psi_j)^{1-\alpha} - (\psi_k - \psi_{j-1})^{1-\alpha} + (\psi_k - \psi_j)^{1-\alpha}$, $b_k = (\psi_{k+1} - \psi_k)^{1-\alpha}$, $\psi_j = \psi(t_j)$ e $u_j \approx u(t_j)$.

As escolhas feitas para a função $\psi(t)$ são motivadas pelos casos particulares da derivada fracionária ψ -Riemann-Liouville [17].

Aplicação 4.1. Encontrar $u(t)$ tal que

$$\begin{cases} \mathbb{D}_0^{\alpha;\ln(t)} u(t) = 3^\alpha t^3, & t \in (0, 1], \alpha \in (0, 1) \\ u(\Delta t) = \Delta t^3, \end{cases}$$

usando a Definição 2.3. A solução exata é $u(t) = t^3$.

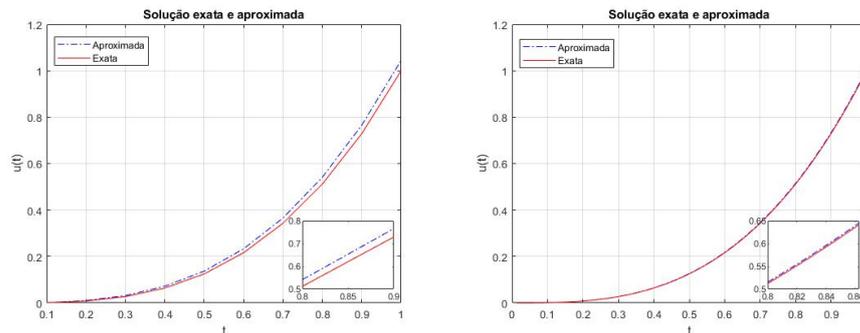


Figura 3: Solução exata e aproximada com $\alpha = 0,3$, onde os espaçamentos de malha são $\Delta t = 1/10$ (esquerda) e $\Delta t = 1/80$ (direita).

Na Figura 3 são apresentados os resultados numéricos, onde comparamos a solução exata e a solução obtida usando a Definição 2.3, para o caso em que $\psi(t) = \ln(t)$ e $\alpha = 0,3$. O espaçamento de malha empregado foi $\Delta t = 1/10$ (esquerda) e $\Delta t = 1/80$ (direita).

Δt	$\alpha = 0,3$		$\alpha = 0,9$	
	Erro $\ \cdot\ _\infty$	T. Conv.	Erro $\ \cdot\ _\infty$	T. Conv.
0,10000	4,48275e-02	1,10216	1,15449e-01	1,05441
0,05000	2,11360e-02	1,08468	5,44962e-02	1,08303
0,02500	1,01207e-02	1,06239	2,56097e-02	1,08947
0,01250	4,90963e-03	1,04363	1,20205e-02	1,09119
0,00625	2,40511e-03	1,02951	5,63966e-03	1,09182
0,00313	1,18641e-03	1,01950	2,64555e-03	1,09204
0,00156	5,88020e-04	1,01267	1,24103e-03	1,09203
0,00078	2,92360e-04	1,00812	5,82250e-04	1,09183

Tabela 3: Erro e taxa de convergência para $\alpha = 0,3$ e $\alpha = 0,9$.

A Tabela 3 mostra os resultados obtidos para o erro e a taxa de convergência, usando a norma infinito (vetorial). Foram usados dois valores para o parâmetro α , $\alpha = 0,3$ e $\alpha = 0,9$.

5 Considerações finais

Neste trabalho, foi possível desenvolver uma aproximação por diferenças finitas para a derivada fracionária de Riemann-Liouville de uma função u com respeito a outra ψ . Nesse sentido, alguns experimentos numéricos foram realizados, casos particulares da derivada fracionária ψ -Riemann-Liouville, notando que as taxas de convergência são próximas de um. Além disso, uma aplicação unidimensional, obtendo taxa de convergência próxima de um, finaliza o trabalho.

Agradecimentos

Martha Aurora Parra Pulido agradece ao processo nº 140784/2020-9, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

Referências

- [1] R. Almeida. “A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function”. Em: **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation** 44 (2017), pp. 460–481.
- [2] A. K. Anatoly. “Hadamard-type fractional calculus”. Em: **Journal of the Korean Mathematical Society** 38.6 (2001), pp. 1191–1204.
- [3] A. Anguraj, S. Kanjanadevi e J. J. Nieto. “Mild solutions of Riemann-Liouville fractional differential equations with fractional impulses”. Em: **Nonlinear Anal.: Modell. Control** 22.6 (2017), pp. 753–764.
- [4] A. Bhrawy e A. S. Alofi. “The operational matrix of fractional integration for shifted Chebyshev polynomials”. Em: **Applied Mathematics Letters** 26.1 (2013), pp. 25–31.

- [5] Y. Chen, X. Ke e Y. Wei. “Numerical algorithm to solve system of nonlinear fractional differential equations based on wavelets method and the error analysis”. Em: **Appl. Math. Comput.** 251 (2015), pp. 475–488.
- [6] K. Diethelm e G. E. Karniadakis. “Fundamental approaches for the numerical handling of fractional operators and time-fractional differential equations”. Em: **Handbook of Fractional Calculus with Applications** 3 (2019), pp. 1–22.
- [7] S. Erokhin e O. Roshka. “Supplement of differential equations of fraction order for forecasting of financial markets”. Em: **MATEC Web of Conferences**. Vol. 170. EDP Sciences. 2018, p. 01075.
- [8] L. R. Evangelista e E. K. Lenzi. **Fractional diffusion equations and anomalous diffusion**. Cambridge University Press, 2018.
- [9] R. Garrappa. “Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial”. Em: **Mathematics** 6.2 (2018), p. 16.
- [10] R. Hilfer. **Applications of fractional calculus in physics**. World scientific, 2000.
- [11] G. Karniadakis. **Handbook of Fractional Calculus with Applications**. Vol. 3. De Gruyter, Berlin, 2019.
- [12] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava e J. J. Trujillo. **Theory and Applications of Fractional Differential Equations**. Vol. 204. elsevier, 2006.
- [13] E. M. Mendes, G. H. O. Salgado e L. A. Aguirre. “Numerical solution of Caputo fractional differential equations with infinity memory effect at initial condition”. Em: **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.** 69 (2019), pp. 237–247.
- [14] M. D Ortigueira e J. A. T. Machado. “Fractional signal processing and applications”. Em: **Signal Processing** 83.11 (2003).
- [15] I. Podlubny. “Fractional differential equations”. Em: **Mathematics in Science and Engineering** 198 (1999), pp. 41–119.
- [16] M. Pulido, J. Vanterler da C. Sousa e E. Capelas De Oliveira. “Aproximação por diferenças finitas da derivada fracionária ψ -Caputo”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics** 9.1 (2022).
- [17] G. S. Teodoro. “Derivadas Fracionárias: Tipos e Critérios de Validade”. Tese de doutorado. Imecc-Unicamp, Campinas, 2019.
- [18] J. Vanterler da C. Sousa e E. Capelas De Oliveira. “Leibniz type rule: ψ -Hilfer fractional operator”. Em: **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.** 77 (2019), pp. 305–311.
- [19] J. Vanterler da C. Sousa e E. Capelas De Oliveira. “On the ψ -fractional integral and applications”. Em: **Comput. Appl. Math.** 38.1 (2019), pp. 1–22.
- [20] J. Vanterler da C. Sousa e E. Capelas De Oliveira. “On the ψ -Hilfer fractional derivative”. Em: **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.** 60 (2018), pp. 72–91.
- [21] Y. Yang, Y. Chen e Y. Huang. “Spectral-collocation method for fractional Fredholm integro-differential equations”. Em: **Journal of the Korean Mathematical Society** 51.1 (2014), pp. 203–224.