

# As aproximações de Fujimoto e o origami na representação de frações do tipo $1/n$

Olga Harumi Saito<sup>1</sup>, Patricia Massae Kitani<sup>2</sup>

DAMAT/UTFPR, Curitiba, PR

Scheila Odisi Fleischmann<sup>3</sup>

EEB Jorge Zipperer, Rio Negrinho, SC

**Resumo.** Este trabalho apresenta o Método de Aproximação de Fujimoto para expressar frações do tipo  $1/n$  utilizando a arte milenar de dobradura em papel, o origami. Empregando os números binários é possível definir a precisão desse procedimento. Por outro lado, também é possível converter a representação decimal de um número do tipo  $1/n$  para a sua representação binária utilizando dobraduras. A utilização dessa ferramenta alternativa para o ensino de frações possibilita, de forma agradável, um melhor entendimento dos conteúdos que envolvem as frações.

**Palavras-chave.** Ensino de Frações, Números Binários, Dobraduras, Método de Fujimoto

## 1 Introdução

Vários pesquisadores discutem as dificuldades enfrentadas pelos alunos na aprendizagem dos números racionais, especialmente na compreensão do conceito de frações. Geralmente, essas dificuldades estão relacionadas à representação e interpretação de situações cotidianas que envolvem frações, tornando importante o uso de ferramentas que contribuam para o ensino desses conceitos [1].

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [2], os estudantes devem ser incentivados a expandir os ensinamentos que já trazem na sua bagagem, investigando o conhecimento informal para torná-lo eficaz e científico, auxiliando-os a resolverem questões diversas e abrindo-se criativamente para soluções inovadoras.

Ainda, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) [5] apresentam que a Matemática no currículo é importante para a inserção dos cidadãos no mundo do trabalho, nas relações sociais e na cultura, no desenvolvimento de capacidade crítica, na formação de capacidades intelectuais, na aplicação a problemas cotidianos e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares.

Diante disso, usando o origami, que é uma cultura milenar, é possível desenvolver conceitos matemáticos desde os mais simples até os mais complexos, partindo da prática, do lúdico como forma de motivação, fazendo uso de papéis e dobras que podem ser empregados como ferramentas auxiliares durante o processo ensino-aprendizagem na Matemática [4, 6].

Assim, perante as dificuldades apresentadas pelos estudantes no aprendizado sobre frações, com as dobraduras é possível aprimorar os estudos de divisões e de frações como representar números do tipo  $1/n$  a partir de uma simples tira de papel.

---

<sup>1</sup>harumi@utfpr.edu.br.

<sup>2</sup>kitani@utfpr.edu.br.

<sup>3</sup>scheilaflei@hotmail.com

## 2 O Método de Aproximação de Fujimoto para $\frac{1}{n}$ , $n$ ímpar

Dobrar uma tira de papel em 2, 4, 8, ... partes congruentes é relativamente fácil, mas e se desejar dobrar em 3, 5, 7, ... partes iguais?

Na década de 1970, o japonês Shuzo Fujimoto desenvolveu um método de dobradura para localizar em uma tira de papel a porção referente a  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{7}$  ou ainda,  $\frac{1}{n}$ ,  $n$  ímpar. Esse procedimento ficou conhecido como “Método de Aproximação de Fujimoto” [4].

### 2.1 Método de Fujimoto: procedimento para $n$ ímpar

A técnica de Aproximação de Fujimoto para qualquer  $n$  ímpar, consiste em colocar um vinco na tira de papel em uma aproximação da parte desejada. A localização do primeiro vinco é definida na provável posição da  $n$ -ésima parte, que produz certo erro de aproximação. A partir desse primeiro vinco é que a sequência de dobraduras acontece (para a direita ou para a esquerda). A cada dobra, o erro diminui pela metade e a cada repetição do processo, o erro obtido decai em potências de 2 do erro da etapa anterior. O processo pode ser repetido até que não haja diferença perceptível nos vincos sucessivos para  $\frac{1}{n}$ , que é obtido com a maior precisão possível [4].

Uma tira de papel, representada por um retângulo, é usada para facilitar a parte gráfica da visualização. Assim, essa tira representa o inteiro que possui 1 unidade de comprimento e  $e$  representa o suposto erro cometido na primeira dobra e que diminuiu a cada etapa da divisão da tira de papel de  $n$  partes congruentes.

#### Procedimento:

1. Utiliza-se uma tira de papel.
2. A suposta quinta parte desse inteiro é obtida fazendo uma dobra, por exemplo, da esquerda para a direita,  $\frac{1}{5} + e$ ; ao tirar essa parte do inteiro tem-se  $1 - \left(\frac{1}{5} + e\right) = \frac{4}{5} - e$ .  
É importante notar que o erro  $e$  pode ser negativo, isto é, se a dobra inicial estiver à esquerda do  $1/5$ .
3. Faz-se um novo vinco, dobrando  $\frac{4}{5}$  do papel ao meio para encontrar  $\frac{2}{5}$  dessa tira de papel, sempre levando em consideração o erro cometido  $e$ , ou seja,  $\frac{2}{5} - \frac{e}{2}$ .
4. Então, olhando essa tira sob nova perspectiva,  $\frac{1}{5} + e + \frac{2}{5} - \frac{e}{2} = \frac{3}{5} + \frac{e}{2}$ .
5. Fazendo outro vinco, dobrando a parte que representa  $\frac{2}{5}$  pela metade, chega-se na parte do papel que representará a quinta parte, que é a parte almejada:  $\frac{1}{5} - \frac{e}{4}$ .
6. Repetindo, agora no lado esquerdo da tira todos os passos anteriores, encontra-se a quinta parte dessa tira de papel com uma melhor aproximação, ou seja,  $\frac{1}{5} + \frac{e}{16}$ .

Assim, o fator de erro é  $\frac{e}{16}$ .

A Figura 1 mostra a representação do passo a passo. Para uma melhor precisão, repete-se o processo todo para o resultado obtido  $\frac{1}{5} + \frac{e}{16}$ .

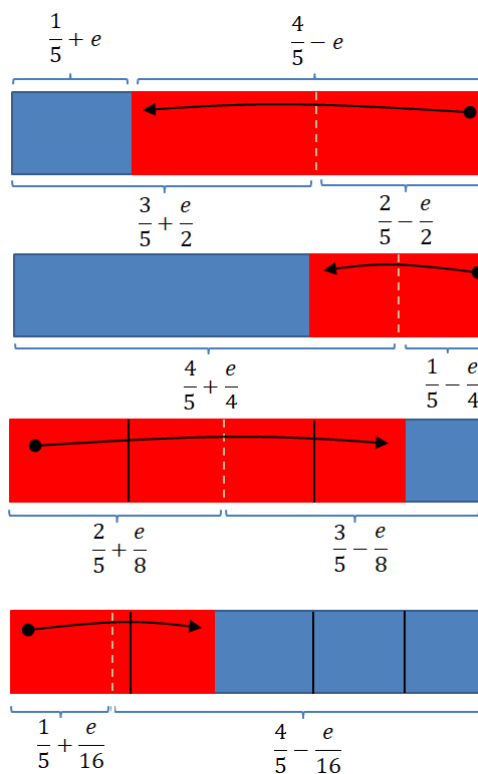


Figura 1: Representação da fração  $\frac{1}{5}$  pelo método de Fujimoto. Fonte: elaborado pelas autoras.

Basicamente, a estratégia consiste em realizar a dobra no lado da tira que tem **um número par** que quintos da tira, como mostra a Tabela 1.

Tabela 1:  $\frac{1}{5}$ : dobras da tira de papel.

Lado esquerdo do papel	Lado direito do papel	Dobra a partir da borda
$\frac{1}{5} + e$	$\frac{4}{5} - e$	direita ←
$\frac{3}{5} + \frac{e}{2}$	$\frac{2}{5} - \frac{e}{2}$	direita ←
$\frac{4}{5} - \frac{e}{4}$	$\frac{1}{5} + \frac{e}{4}$	esquerda →
$\frac{2}{5} + \frac{e}{8}$	$\frac{3}{5} - \frac{e}{8}$	esquerda →
$\frac{1}{5} + \frac{e}{16}$	$\frac{4}{5} - \frac{e}{16}$	

Assim, usando as dobraduras, pelo Método de Aproximação de Fujimoto, é possível encontrar a quinta parte da tira de papel, com uma ótima precisão. Na prática, cessa a execução da dobradura

quando a dobra obtida acaba se tornando imperceptível com a do processo anterior.

Há um método similar ao de Fujimoto, descoberto por James Brunton [3] para encontrar a fração correspondente a  $\frac{1}{n}$ ,  $n$  ímpar, na tira de papel através de sua representação binária.

## 2.2 O algoritmo de dobra binária para $\frac{1}{n}$

Brunton [3] desenvolveu, de forma independente de Fujimoto, um método utilizando a base binária para a aproximação da fração tipo  $\frac{1}{n}$ , observando que a tira de papel é sempre dobrada ao meio a partir de uma de suas bordas. O método, expandido por Robert Lang [4], produz uma sequência de dobras eficientes para construir uma representação de uma fração em sua forma binária. Nessa notação existem apenas os dígitos 1 e 0.

Para escrever na base binária uma fração com parte decimal pode-se utilizar o Método das Multiplicações Sucessivas e  $\frac{1}{5} = 0,2_{10} = 0,0011001\dots_2 = 0,\overline{0011}_2$ , onde o índice 10 indica a base decimal e 2 a base binária.

Outra forma de escrever a fração decimal na base binária é apresentá-la numa forma de série, ou seja, para determinar  $x$ , tal que  $0 < x < 1$ , faz-se  $x = \frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{4} + \frac{i_3}{8} + \frac{i_4}{16} + \frac{i_5}{32} + \frac{i_6}{64} + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i_j}{2^j}$ , onde  $i_j = 0$  ou  $i_j = 1$ . Assim, para o primeiro termo:

$$\begin{cases} i_1 = 0, \text{ se } x < \frac{1}{2} \\ i_1 = 1, \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (1)$$

E, para os demais numeradores dos termos:

$$\begin{cases} i_j = 0, \text{ se } x < \left( \sum_{k=1}^{j-1} \frac{i_k}{2^k} \right) + \frac{1}{2^j}, j = 2, 3, 4, \dots \\ i_j = 1, \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (2)$$

Para  $x = \frac{1}{5}$ , na base 2, tem-se:

$$\frac{1}{5} = \frac{0}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{0}{32} + \frac{0}{64} + \dots = 0,\overline{0011}_2 \quad (3)$$

Detalhando:

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{2} \rightarrow i_1 = 0 \rightarrow \frac{1}{5} = 0 + \dots;$$

$$\frac{1}{5} < \frac{0}{2} + \frac{1}{4} \rightarrow i_2 = 0 \rightarrow \frac{1}{5} = 0 + 0 + \dots;$$

$$\frac{1}{5} = \frac{8}{40} > \frac{0}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} = \frac{5}{40} \rightarrow i_3 = 1 \rightarrow \frac{1}{5} = 0 + 0 + \frac{1}{8} + \dots;$$

$$\frac{1}{5} = \frac{16}{80} > \frac{0}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{10+5}{80} = \frac{15}{80} \rightarrow i_4 = 1 \rightarrow \frac{1}{5} = 0 + 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots;$$

$$\frac{1}{5} = \frac{32}{160} < \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{5+20+10}{160} = \frac{35}{160} \rightarrow i_5 = 0 \rightarrow \frac{1}{5} = 0 + 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + 0 + \dots;$$

$$\frac{1}{5} = \frac{64}{320} < \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{10+40+20}{320} = \frac{70}{320} \rightarrow i_6 = 0 \rightarrow \frac{1}{5} = 0 + 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + 0 + 0 + \dots$$

No caso da fração  $\frac{1}{5}_{10} = 0,0011_2$ , tem-se dois dígitos zeros seguidos de dois dígitos um. E na tira de papel:

(dobrar da direita para a esquerda  $\times 2$ )(dobrar da esquerda para a direita  $\times 2$ ).

Nesse momento, o processo começa a se repetir, ou seja a base dois aparece na ordem  $0011_2$ , que representa exatamente a indicação das dobras *direita-direita-esquerda-esquerda*.

Além da divisão da tira de papel em 5 partes congruentes, a Aproximação de Fujimoto serve para qualquer  $\frac{1}{n}$ , com  $n$  ímpar. A divisão em  $n$  partes pares é mais simples iniciando com a dobra da tira de papel ao meio e a partir daí ou divide-a ao meio novamente ou a parte obtida é um número ímpar.

E assim, podem ser feitas divisões em outras  $n$  quantidades, usando o método da Aproximação de Fujimoto para encontrar a fração desejada sempre mais próxima do valor real.

### 2.3 Do decimal para o binário com origami

Na seção anterior foi visto que a representação binária resulta em um algoritmo para encontrar a fração  $\frac{1}{n}$  com dobraduras. Por outro lado, a partir de dobraduras em uma tira de papel é possível determinar a representação binária do número racional desejado, justificado pelas condições (1) e (2).

O processo consiste em sucessivas dobras ao meio e a cada dobra, verifica se o vinco que indica  $\frac{1}{n}$  está do lado direito ou esquerdo da última dobra. A técnica funciona para qualquer número racional da forma  $\frac{a}{n} < 1$ .

**Procedimento:**

1. Considere a tira de papel como o intervalo  $[0, 1]$  e faça um vinco que represente  $\frac{a}{n}$  na tira.
2. Dobre ao meio, obtendo dois subintervalos,  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  e  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ;
3. Verifique em qual intervalo o vinco de  $\frac{a}{n}$  está: se estiver na metade esquerda, escreva 0 na primeira posição após a vírgula na representação binária, caso contrário escreva 1.
4. Repita os passos 2-3 com a metade do intervalo que contém o número racional. Encontrando o segundo dígito binário.
5. Continue repetindo os passos 2-4 até que a precisão desejada seja alcançada.

**Exemplo para o caso  $\frac{1}{7}$ :** Aqui, considere que o vinco que representa a fração  $\frac{1}{7}$  tenha sido feito seguindo, por exemplo, o processo de Aproximação de Fujimoto. A seguir, a descrição do procedimento para a verificação, como mostra a Figura 2.

- $\frac{1}{7} < \frac{1}{2}$ , portanto,  $\frac{1}{7}$  está na metade esquerda da tira. Anote 0 como o primeiro dígito binário procurado:  $\frac{1}{7}_{10} = 0,0_2$ .

- Agora dobre a metade esquerda da tira ao meio, obtendo agora os intervalos  $[0, \frac{1}{4}]$  e  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ . Como  $\frac{1}{7} < \frac{1}{4}$ , o número  $\frac{1}{7}$  está na metade esquerda da última dobra. Anote 0 como o segundo dígito binário:  $\frac{1}{7}_{10} = 0,00_2$ .
- Considere a parte da tira que representa o intervalo  $[0, \frac{1}{4}]$ , dobre ao meio obtendo os intervalos  $[0, \frac{1}{8}]$  e  $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$  e verifique em qual metade está o vinco de  $\frac{1}{7}$ . Neste caso, como  $\frac{1}{7} > \frac{1}{8}$ , agora o vinco está na metade direita da última dobra, ou seja, no intervalo  $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$ . Assim, escreva 1 como o terceiro dígito binário procurado:  $\frac{1}{7}_{10} = 0,001_2$ .
- Dobre ao meio a parte da tira que representa  $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$ , obtendo os intervalos  $[\frac{1}{8}, \frac{3}{16}]$  e  $[\frac{3}{16}, \frac{1}{4}]$ . Como  $\frac{1}{7} < \frac{3}{16}$ , o vinco inicial está na metade esquerda da última dobra, portanto, anote 0:  $\frac{1}{7}_{10} = 0,0010_2$ .

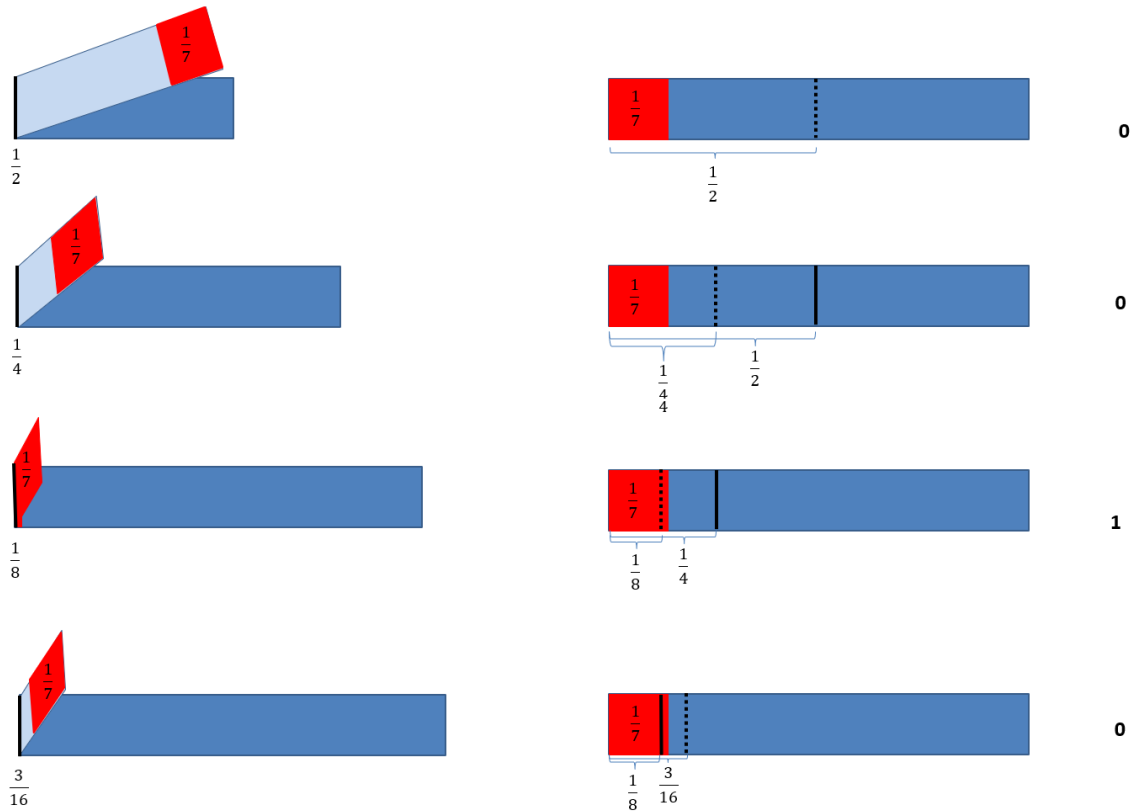


Figura 2:  $\frac{1}{7}_{10} = 0,0010_2$ : da tira de papel para o binário. Fonte: elaborado pelas autoras.

Prosseguindo desta forma, consegue-se a representação binária com alguns dígitos. Na prática, basta observar se o vinco que representa  $\frac{1}{7}$  está do lado direito ou esquerdo da última dobra. A precisão do método de dobradura de papel depende do comprimento da tira de papel e da habilidade em fazer as dobras mais precisas. Portanto, o método de dobradura limita a quantidade de dígitos comparado a outras técnicas de conversão para a representação binária, mas pode ser uma forma interessante e educativa de visualizar a representação binária de um número racional.

### 3 Considerações Finais

O origami é uma valiosa ferramenta que auxilia no ensino-aprendizagem em Matemática possibilitando, de maneira natural a compreensão dos conceitos matemáticos permitindo que o aluno desenvolva seu raciocínio e visualize as contextualizações com maior facilidade.

Com o Método de Aproximações de Fujimoto para frações do tipo  $\frac{1}{n}$ , pode-se trabalhar as dobraduras associadas à base binária utilizando as operações básicas nas frações envolvendo a potenciação.

Os procedimentos alternativos são importantes para despertar o interesse e a curiosidade dos alunos e as oficinas de atividades são uma ótima oportunidade para isso. Lembrando que cabe a cada professor intermediador conduzir seu trabalho de acordo com sua realidade.

### Agradecimentos

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior - Brasil (CAPES) pelo apoio - Código de Financiamento 001.

### Referências

- [1] L. E. Bertoni. **Um novo paradigma no ensino e aprendizagem das Frações**. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Acessado em 08/12/2021, <http://www.sbemrasil.org.br/files/viii/pdf/15/PA01.pdf>.
- [2] BNCC. **Base Nacional Comum Curricular**. Online. Acessado em 18/02/2023, [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_-versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf).
- [3] J. Brunton. **Mathematical Exercises in Paper Folding - Mathematics in School**. Longmans for the Mathematics Associations, 1973.
- [4] R. J. Lang. **Origami and Geometric Constructions**. Online. Acessado em 28/01/2023, [https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami\\_constructions.pdf](https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf).
- [5] PCN. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Pcn**. Online. Acessado em 08/01/2023, <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>.
- [6] G. N. Silva. "Origamática: o origami no ensino-aprendizagem de matemática". Dissertação de mestrado. UFRGS, 2009.