

Construção de Códigos Assimétricos de Superfície sobre Superfícies não Orientáveis

Waldir S. Soares Jr.¹
DAMAT/UTFPR, Pato Branco, PR
Eduardo B. da Silva²
DMA/UEM, PR
Giuliano La Guardia³
UEPG, PR
Douglas F. Copatti⁴
IFPR, Pitanga, PR

Resumo. O primeiro código quântico corretor de erros (CQCE) foi proposto por Shor [11]. A partir dessa publicação, muitos pesquisadores têm focado atenção na construção e/ou investigação de propriedades de novas famílias de códigos quânticos. Os códigos assimétricos têm a propriedade de proteção desigual para diferentes tipos de erros: a distância mínima para erros do tipo Z (d_z) é diferente da distância mínima para erros do tipo X (d_x). No que concerne ao código de superfície, este é um tipo particular da classe de códigos Calderbank-Shor-Steane (CSS) [5]. No código de superfície, tanto os qubits quanto os operadores estabilizadores estão associados a elementos geométricos da respectiva superfície e dependem fortemente da topologia da mesma. Neste trabalho, utilizamos a formulação dos códigos quânticos assimétricos de superfície (CQAS) proposta por Albuquerque *et al.* [1], definidos sobre superfícies orientáveis, e construímos CQAS sobre superfícies não orientáveis. Verificamos que alguns CQAS propostos neste artigo possuem taxa de codificação melhores que os correspondentes obtidos em [1], os quais são derivados de superfícies orientáveis de mesmo gênero.

Palavras-chave. Códigos de superfície, Códigos Assimétricos, Superfícies não orientáveis, Códigos quânticos corretores de erros

1 Introdução

A teoria dos códigos quânticos corretores de erros (CQCEs) originou-se em meados de 1995, com Peter Shor [11]. Em seu trabalho, Shor apresentou o primeiro CQCE, o qual consiste de uma concatenação de dois códigos de 3 qubits cada, um projetado para corrigir erros do tipo bit-flip e o outro construído para corrigir erros do tipo phase-shift.

Após tal artigo, a teoria dos CQCEs tem se desenvolvido rapidamente, com a construção de diversos tipos de códigos. Em 1996, Calderbank *et al.* introduziram uma classe importante e conhecida de CQCEs: os códigos Calderbank-Shor-Steane (CSS) [5], [12]. Os códigos CSS fazem parte de uma classe ainda mais geral de códigos quânticos denominados códigos estabilizadores, que, por sua vez, são uma versão quântica derivada de códigos clássicos lineares [6].

¹waldirjunior@utfpr.edu.br

²ebsilva@uem.br

³gguardia@uepg.br

⁴copatti@gmail.com

Em 1997, Kitaev propôs uma maneira diferente de gerar códigos estabilizadores [8]. Em seu trabalho, Kitaev construiu o bem conhecido código tórico. Em um toro, Kitaev considerou uma tesselação quadrangular regular (ou seja, a tesselação $\{4, 4\}$), e associou os qubits às arestas dessa tesselação. Ademais, associou operadores vértice aos vértices e operadores face às faces da referida tesselação. Dessa forma, os geradores do código estabilizador agem de forma local, ou seja, os operadores agem apenas numa vizinhança dos respectivos qubits, resultando no fato de que as palavras-código tornam-se resistentes a ruídos locais [4].

Ao longo do tempo o código tórico foi muito estudado donde diversos autores apresentaram várias propostas de extensão e generalização para tal código. Em particular, o trabalho de Albuquerque **et.al.**[2] generaliza as ideias do código tórico para superfícies compactas de gênero $g \geq 2$, utilizando-se ferramentas da geometria hiperbólica. Tais códigos são conhecidos atualmente como códigos de superfície.

No que concerne aos códigos quânticos assimétricos (CQAs), tais códigos são definidos sobre canais quânticos em que erros dos tipos bit-flip e phase-shift podem ter probabilidades diferentes de ocorrência. A ideia de correção desigual de erros foi introduzida por Andrew Steane em [12]. Assim como o código tórico, construções de novas famílias de códigos assimétricos foram propostas (veja, por exemplo, [10]). Em tal artigo, Sarvepalli **et.al.**, propuseram uma construção de CQAs obtidos a partir de códigos LDPC por meio da construção CSS, a qual foi generalizada para códigos assimétricos. Mais recentemente, em [1], Albuquerque **et.al.** construíram códigos quânticos assimétricos de superfície (CQAS) em superfícies compactas e orientáveis.

O objetivo principal deste trabalho é estender a construção proposta em [1] para superfícies compactas e não-orientáveis. A construção proposta aqui gera códigos com parâmetros melhores que os parâmetros dos respectivos códigos assimétricos gerados sobre superfícies orientáveis.

2 Geometria Hiperbólica

Nesta seção revisaremos alguns conceitos da geometria hiperbólica necessários para o desenvolvimento do trabalho. Para maiores detalhes recomendamos [7], [13] e [3].

A geometria hiperbólica, assim como várias outras geometrias não-euclidianas, surgiram como resposta à negação do quinto postulado de Euclides. Há dois modelos (equivalentes) para a geometria hiperbólica: o semi plano superior $\mathbb{H}^2 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ e o disco de Poincaré, $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

O espaço \mathbb{H}^2 munido com a métrica

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} \tag{1}$$

é conhecido como **plano hiperbólico** ou **plano de Lobachevsky** e essa métrica é a **métrica hiperbólica**. Essa aplicação é, de fato, uma métrica [7].

O grupo das matrizes $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sobre \mathbb{R} , tal que $\det(g) = 1$ é denominado grupo **unimodular**, denotado por $SL(2, \mathbb{R})$. O conjunto das transformações de Möbius $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{2}$$

em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - cd = 1$, forma um grupo cujo produto das transformações é dado pelo produto das matrizes correspondentes, e o elemento inverso corresponde à matriz inversa. Cada transformação T pode ser representada por um par de matrizes $\pm g \in SL(2, \mathbb{R})$. O **grupo projetivo especial linear** é definido como sendo o quociente $PSL(2, \mathbb{R}) \equiv SL(2, \mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$.

As transformações de Möbius são homeomorfismos que preservam a distância hiperbólica em \mathbb{H}^2 . Portanto, o grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ é um subgrupo do grupo de todas as isometrias de \mathbb{H}^2 , denotado por $Isom(\mathbb{H}^2)$. Conseqüentemente, a transformação γ em $PSL(2, \mathbb{R})$ “leva” geodésica em geodésica. Como as transformações de Möbius são transformações conformes, ou seja, preservam ângulos, segue-se que a área hiperbólica é invariante sob todas as transformações em $PSL(2, \mathbb{R})$. A seguir definimos o conceito de grupo Fuchsiano.

Definição 2.1. Um grupo Fuchsiano é um subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Definição 2.2. Seja (X, d) um espaço métrico e Γ um grupo de homeomorfismos agindo propriamente descontinuamente em X . Um subconjunto fechado $\tilde{F} \subset X$ com interior não vazio é denominado região fundamental de Γ se

- (i) $\bigcup_{T \in \Gamma} T(\tilde{F}) = X$;
- (ii) $int\tilde{F} \cap T(int\tilde{F}) = \emptyset; \forall T \in \Gamma \setminus \{I\}$,

em que $int(\tilde{F})$ é o conjunto dos pontos interiores de \tilde{F} .

A família $\{T(\tilde{F}) : T \in \Gamma\}$ é denominada tesselação de X .

Sabe-se que qualquer superfície topológica compacta \mathbb{M} pode ser obtida de um polígono P' por pares de arestas identificadas se as condições de comprimento e ângulos sejam satisfeitas [13]. Mais especificamente, sejam Γ um grupo de isometrias que preservam a orientação e D um polígono para Γ . Uma **transformação de emparelhamento de lados** é uma isometria que preserva orientação $\gamma \in \Gamma \setminus \{I\}$ que identifica um lado $s \in D$ a outro lado $s' = \gamma(s) \in D$. Note que cada vértice $v \in D$ é aplicado a outro vértice de D sob uma transformação de emparelhamento de lados associada a um lado cuja extremidade é v . Cada vértice v de D possui dois lados s e $*s$ (de D) incidentes em v . Denotamos por (v, s) um vértice v e um lado s de D com extremidade v , e por $(v, *s)$ o par do vértice v e o outro lado $*s$ com extremidade v . Considere o seguinte procedimento:

- Sejam $v = v_0$ um vértice de D e s_0 um lado com uma extremidade em v_0 . Seja γ_1 uma transformação de emparelhamento de lados associada ao lado s_0 . Assim, γ_1 “leva” s_0 a um outro lado s_1 de D .
- Sejam $s_1 = \gamma_1(s_0)$ e $v_1 = \gamma_1(v_0)$. Isso fornece um novo par (v_1, s_1) .
- Considere agora o par $(v_1, *s_1)$. Esse é o par consistindo do vértice v_1 e o lado $*s_1$.
- Seja γ_2 a transformação de emparelhamento de lados associada ao lado $*s_1$. Então, $\gamma_2(*s_1)$ é um lado s_2 de D e $\gamma_2(v_1) = v_2$ um vértice de D .
- Repita o processo acima indutivamente.

Desta forma, obtém-se uma seqüência de pares de vértices e lados dados a seguir:

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ s_0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ s_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ *s_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} v_2 \\ s_2 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} v_i \\ s_i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} v_i \\ s_{*i} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} v_{i+1} \\ s_{i+1} \end{pmatrix} \rightarrow \dots$$

Como existe somente um número finito de pares (v, s) , esse processo de aplicação de uma transformação de emparelhamento de arestas seguida por uma aplicação $*$ deve eventualmente retornar ao par inicial (v_0, s_0) . Seja $\lambda > 0$ o menor inteiro para o qual $(v_\lambda, *s_\lambda) = (v_0, s_0)$. A seqüência de vértices $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{\lambda-1}$ é o ciclo de vértices, e a transformação $\gamma_\lambda \gamma_{\lambda-1} \dots \gamma_2 \gamma_1$

é denominada **transformação de ciclo elíptico**. Como a quantidade de pares de vértices e lados é finita, então existe apenas uma quantidade finita de ciclos de vértices e transformações de ciclos elípticos.

Um emparelhamento de lados de P' define um espaço de identificação $S_{P'}$ e, nesse espaço de identificação, existe uma função distância que coincide com a distância hiperbólica para regiões suficientemente pequenas no interior de P' , tornando-o uma superfície hiperbólica quando os ângulos de cada ciclo de vértices somam 2π .

Uma superfície compacta \mathbb{H}^2/Γ é o **espaço de identificação** de um polígono se o polígono é uma região fundamental para Γ . Uma condição necessária e suficiente para um polígono ser região fundamental é a seguinte [13]:

Teorema 2.1. *(Condição de lado e ângulo) Se um polígono compacto P' é região fundamental para um grupo de isometrias que preservam a orientação Γ de \mathbb{S}^2 , \mathbb{R}^2 ou \mathbb{H}^2 , então:*

- para cada lado s de P' , existe um único lado s' de P' tal que $s' = \gamma(s)$, para $\gamma \in \Gamma$;
- dado um emparelhamento de lados de P' , para cada conjunto de vértices identificados, a soma dos ângulos deve ser igual a 2π . Esse conjunto é um ciclo de vértices.

Teorema 2.2. *(Poincaré) Um polígono compacto P' satisfazendo as condições de lado e ângulo é uma região fundamental para o grupo Γ gerado pelas transformações de emparelhamento de lados de P' , e Γ é um grupo Fuchsiano.*

3 Códigos de Superfície

Nesta seção revisaremos a construção do código tórico bem como a construção dos códigos de superfície com gênero $g > 1$.

Considere uma tesselação por quadrados no toro $l \times l$. As arestas dessa tesselação são colocadas em correspondência bijetora com os qubits. Como cada aresta pertence a duas faces da tesselação, segue-se que $|E| = 2l^2$, ou seja, o comprimento da palavra-código é igual a $n = 2l^2$.

Os operadores estabilizadores estão associados aos vértices e às faces da tesselação. A cada vértice v da tesselação está associado um operador X_v que age como a matriz de Pauli X nos qubits associados a cada aresta adjacente a esse vértice e como a identidade em todos os outros qubits. A cada face f da tesselação está associado um operador Z_f que age como a matriz de Pauli Z nos qubits que estão associados a cada aresta que está na fronteira de tal face e como identidade em todos os outros qubits. Em resumo: $X_v = \bigotimes_{j \in E} X^{\delta(j \in E_v)}$ e $Z_f = \bigotimes_{j \in E} Z^{\delta(j \in E_f)}$ em que δ é o delta de Kronecker.

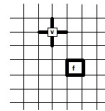


Figura 1: Suporte dos operadores face (Z_f) e vértice (X_v) do Código Tórico de Kitaev.

Dessa forma, o código tórico de Kitaev é o subespaço do espaço de Hilbert \mathcal{H} de dimensão 2^{2l^2} definido por:

$$\mathcal{C} = \{|\psi\rangle; X_v|\psi\rangle = |\psi\rangle; Z_f|\psi\rangle = |\psi\rangle; \forall v, f\}.$$

O código tórico possui parâmetros $[[2l^2, 2, l]]$, em que $k = 2$ é a quantidade de representantes de classes de homologia diferentes de ciclos homologicamente não-triviais e $d = l$ é a quantidade de arestas (qubits) contidos no ciclo homologicamente não-trivial mais curto.

Se considerarmos um g -toro com $g \geq 2$, considera-se, por analogia, a tesselação de um polígono fundamental P' hiperbólico e associa-se os qubits às arestas dessa tesselação, e os operadores vértice e faces são definidos de maneira análoga ao do código tórico.

Para que uma dada tesselação possa cobrir o espaço, a área de P' (denotado por $\mu(P')$) deve ser um múltiplo inteiro da área de P (denotada por $\mu(P)$). Dessa forma, podemos calcular o número de faces dessa tesselação:

$$n_f = \frac{\mu(P')}{\mu(P)} = \frac{4q(g-1)}{pq-2p-2q} \tag{3}$$

O comprimento da palavra-código é dado por $n = \frac{p}{2}n_f$

Similarmente ao código tórico, k é o número de representantes das diferentes classes de homologia de ciclos não triviais, donde $k = 2g$.

Para calcular a distância mínima deve-se descobrir a distância hiperbólica d_h entre dois lados opostos do polígono fundamental P' . Assim, sabe-se que um ciclo de arestas que forma um ciclo de homologia não trivial possuirá, no mínimo, um número de arestas suficientes para que a soma de seus comprimentos não seja menor que d_h .

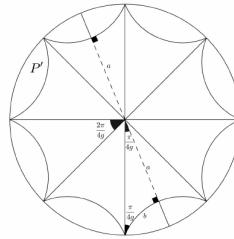


Figura 2: A distância hiperbólica entre dois lados opostos de um polígono P' é $d_h = 2a$

Utilizando-se trigonometria hiperbólica, tem-se que (veja Fig. (2))

$$d_h = 2arccos \frac{\cos(\pi/4g)}{\sin(\pi/4g)}, \tag{4}$$

e o comprimento $l(p, q)$ da aresta do polígono $\{p, q\}$ é dado por

$$l(p, q) = arccos \left[\frac{\cos^2(\pi/q) + \cos(2\pi/p)}{\sin^2(\pi/q)} \right]. \tag{5}$$

Portanto, $d_x = \frac{d_h}{l(p,q)}$ e $d_z = \frac{d_h}{l(q,p)}$, o que implica $d = \lceil \min(d_x, d_z) \rceil$.

4 Construção de códigos assimétricos

Nesta seção serão apresentados exemplos de códigos quânticos assimétricos associados a superfícies não orientáveis.

A principal característica dos códigos assimétricos é que tais códigos são capazes de corrigir erros do tipo bit-flip e erros do tipo phase-shift com probabilidades diferentes, ou seja, $d_x \neq d_z$.

Um exemplo de canal em que erros do tipo phase-shift ocorrem com maior probabilidade do que erros do tipo bit-flip é o canal “combined amplitude damping and dephasing” [9].

Um código quântico assimétrico com parâmetros $((n, K, d_z/d_x))$ é um subespaço K -dimensional de um espaço de Hilbert \mathbb{C}^{2n} sobre \mathbb{C} . O código corrige erros do tipo qubit-flip até $\frac{d_x-1}{2}$ e do tipo phase-shift até $\frac{d_z-1}{2}$. Um código $((n, K, d_z/d_x))$ é denotado por $[[n, k, d_z/d_x]]$.

Construiremos aqui CQAS em superfícies não orientáveis de gênero $g \geq 2$ e verificaremos que tais códigos possuem parâmetros diferentes quando comparados aos códigos apresentados em [1], os quais são gerados sobre superfícies orientáveis de mesmo gênero. Utilizando-se um método de construção similar aos CQAS apresentados em [1], calculamos o número de faces da tesselação que são utilizadas para cobrir o polígono fundamental, bem como computamos a distância hiperbólica de lados opostos do polígono fundamental para o cálculo das distâncias mínimas, donde foi possível calcular os parâmetros de novos CQAS oriundos sobre superfícies não orientáveis.

Para tal construção, considere uma superfície não orientável de gênero g com seu polígono fundamental $P' = \{2g, 2g\}$, tesselado por um polígono $P = \{p, q\}$. Para que essa tesselação exista, o quociente entre a área de P' e P deve ser um número inteiro. Denotando a área de um polígono M por $\mu(M)$, o número de faces n_f pode ser calculado por

$$n_f = \frac{\mu(P')}{\mu(P)} = \frac{2q(g-2)}{pq-2p-2q}; \tag{6}$$

portanto, o comprimento do código é $n = \frac{p}{2}n_f$.

O número de qubits codificados é dado pelo gênero da superfície, o que implica que $k = g$.

Para calcular a distância mínima, precisamos encontrar a distância hiperbólica d_h entre lados opostos do polígono fundamental P' . Assim, sabe-se que um ciclo de arestas que forma um ciclo de homologia não trivial terá, pelo menos, um número de arestas suficiente para que a soma de seus comprimentos seja maior que d_h .

Usando trigonometria hiperbólica segue-se que $d_h = 2arccos \frac{\cos(\pi/4g)}{\sin(\pi/4g)}$ e o comprimento $l(p, q)$ de uma aresta de um polígono $\{p, q\}$ é $l(p, q) = arccos \left[\frac{\cos^2(\pi/q) + \cos(2\pi/p)}{\sin^2(\pi/q)} \right]$. Então, $d_x = \frac{d_h}{l(p,q)}$ e $d_z = \frac{d_h}{l(q,p)}$.

Dessa forma pode-se obter os parâmetros dos códigos construídos por essas tesselações sobre a referida superfície.

Na Tabela 1, mostramos alguns exemplos de novos códigos construídos neste trabalho e apresentamos uma comparação com os respectivos códigos definidos em uma superfície orientável de mesmo gênero. Nesse caso particular, fixamos o gênero $g = 5$ para obter tais comparações. Note que as taxas de codificação k/n dos CQAS propostos neste trabalho são melhores que as taxas de codificação dos códigos disponíveis em [1].

Tabela 1: Comparação dos parâmetros dos códigos gerados pela mesma tesselação $\{p, q\}$ em uma superfície orientável (O) e uma não orientável (NO)

$\{p, q\}$	$[[n, k, dx/dz]]$ (O)	$[[n, k, dx/dz]]$ (NO)	k/n (O)	k/n (NO)
$\{3, 7\}$	$[[168, 10, 5/9]]$	$[[65, 5, 4/7]]$	0,05952	0,07692
$\{3, 8\}$	$[[96, 10, 4/7]]$	$[[36, 5, 3/5]]$	0,10416	0,13888
$\{3, 9\}$	$[[72, 10, 3/7]]$	$[[27, 5, 2/5]]$	0,13888	0,18518
$\{3, 12\}$	$[[48, 10, 2/6]]$	$[[18, 5, 2/4]]$	0,20833	0,27777
$\{4, 6\}$	$[[48, 10, 3/4]]$	$[[18, 5, 3/3]]$	0,20833	0,27777
$\{4, 8\}$	$[[32, 10, 3/4]]$	$[[12, 5, 2/3]]$	0,3125	0,41666

5 Considerações Finais

Neste trabalho foram construídos novos códigos assimétricos sobre superfícies não orientáveis. Como exemplo, consideramos o caso de uma superfície não orientável S de gênero $g = 5$ e comparamos a taxa de codificação k/n dos novos códigos sobre S com a taxa dos códigos assimétricos sobre uma superfície orientável de mesmo gênero $g = 5$. Os códigos propostos aqui possuem taxas de codificação melhores que as correspondentes taxas dos códigos assimétricos disponíveis na literatura, os quais são construídos em superfícies orientáveis.

Referências

- [1] C. D. Albuquerque et al. “Euclidean and hyperbolic asymmetric topological quantum codes”. Em: **Quantum Information Processing** 21.4 (abr. de 2022), p. 153. ISSN: 1573-1332. DOI: 10.1007/s11128-022-03488-8.
- [2] C.D. Albuquerque, R. Palazzo e E.B. Silva. “Topological quantum codes on compact surfaces with genus $g \geq 2$ ”. Em: **Journal of Mathematical Physics** 50.2 (fev. de 2009), pp. 023513–023513. DOI: 10.1063/1.3081056.
- [3] A. F. Beardon. **The Geometry of Discrete Groups**. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012. ISBN: 9781461211464.
- [4] H. Bombin e M. A. Martin-Delgado. “Computacion Cuantica topologica y sistemas fuertemente correlacionados”. Em: **Revista espanola de fisica** 21.2 (2007), pp. 31–45. ISSN: 0213-862X.
- [5] A. R. Calderbank e P. W. Shor. “Good Quantum Error-Correcting Codes Exist”. Em: **Physical Review A** 54.2 (abr. de 1996), pp. 1098–1105. ISSN: 1050-2947. DOI: 10.1103/physreva.54.1098. arXiv: quant-ph/9512032.
- [6] D. Gottesman. “A Class of Quantum Error-Correcting Codes Saturating the Quantum Hamming Bound”. Em: **Physical Review A** 54.3 (jul. de 1996), pp. 1862–1868. ISSN: 1050-2947. DOI: 10.1103/physreva.54.1862. arXiv: quant-ph/9604038.
- [7] S. Katok. **Fuchsian Groups**. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 1992. ISBN: 9780226425825.
- [8] A.Y. Kitaev. “Fault-tolerant quantum computation by anyons”. Em: **Annals of Physics** 303.1 (2003), pp. 2–30. ISSN: 0003-4916. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0003-4916\(02\)00018-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0003-4916(02)00018-0).
- [9] P. K. Sarvepalli, A. Klappenecker e M. Rötteler. “Asymmetric quantum codes: constructions, bounds and performance”. Em: **Proceedings of the Royal Society A** 465 (mai. de 2009), pp. 1645–1672. ISSN: 1364-5021. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2008.0439>.
- [10] P. K. Sarvepalli, A. Klappenecker e M. Rötteler. “Asymmetric quantum codes: Constructions, bounds and performance”. Em: **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences** 465 (abr. de 2015), pp. 1645–1672. DOI: 10.1098/rspa.2008.0439.
- [11] P. W. Shor. “Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory”. Em: **Phys. Rev. A** 52 (4 out. de 1995), R2493–R2496. DOI: 10.1103/PhysRevA.52.R2493.
- [12] A. Steane. “Simple Quantum Error Correcting Codes”. Em: **Physical Review A** 54.6 (mai. de 1996), pp. 4741–4751. ISSN: 1050-2947. DOI: 10.1103/physreva.54.4741. arXiv: quant-ph/9605021.
- [13] J. Stillwell. **Geometry of Surfaces**. Universitext. Springer New York, 1995. ISBN: 9780387977430.