

Um problema de contagem e o número pi

Isaias Guilherme de Souza Boruch¹, Roy Wilhelm Probst²
DAMAT/UTFPR, Curitiba, PR

Resumo. Este trabalho mostra um método inusitado para calcular os dígitos do número pi: o Método das Colisões, proposto por Galperin, em 2003. Uma demonstração é apresentada, utilizando arcos congruentes em circunferências, e outra demonstração é sugerida, utilizando reflexão de feixes de luz em espelhos. Como o método é impossível de ser realizado experimentalmente, uma simulação computacional é criada no GeoGebra, mostrando algumas limitações do software. A simulação criada está disponível na página oficial do GeoGebra.

Palavras-chave. Método das Colisões, Dígitos de pi, GeoGebra.

1 Introdução

Ao longo da história da matemática, muitos métodos foram propostos para determinar o valor da constante π [2, 4]. Desde o método da exaustão, primeiro método científico para a determinação dos dígitos de π , até a utilização de computadores, os métodos mudaram muito ao longo da história e um dos métodos que chama a atenção é o proposto por Galperin [5]. O autor apresenta um método curioso para a determinação dos dígitos de π , partindo de um problema de contagem de choques em um sistema. É interessante observar que tal método é, ao mesmo tempo, encantador, uma vez que transforma um problema de teoria dos números em um problema físico de contagem, mas também experimentalmente impossível de se realizar com materiais concretos.

Para que a quantidade de colisões no sistema resulte nos n primeiros dígitos de π , é necessário que, sendo m a massa de um dos blocos, a massa do outro bloco seja $m \cdot 100^{n-1}$. Assim, para determinar os 12 primeiros dígitos de π , se a massa do bloco menor for 1 kg, então a massa do bloco maior deveria ser 10^{22} kg, que é aproximadamente a massa da lua terrestre. Além disso, existe a necessidade de garantir que o sistema não tenha perda de energia por atrito ou por choques inelásticos.

Assim, tal método se justifica não pela eficiência na determinação dos dígitos de π , mas por sua elegância e por levantar outras questões. Como a colisão entre os blocos e a parede determina os dígitos de π ? Como garantir que isso sempre ocorre? Quais são todas as condições para que a quantidade de choques represente os n primeiros dígitos de π ? Não sendo possível realizar o experimento com materiais concretos, será possível realizá-lo utilizando uma simulação? Como seria a implementação? Quais as limitações deste experimento?

Neste trabalho, além de se investigar respostas a tais questionamentos, será proposta a implementação de uma simulação do experimento, destacando a quantidade de choques no sistema, bem como a possibilidade de se alterar as condições iniciais de massa dos blocos.

¹isaias_boruch@hotmail.com

²rwprost@utfpr.edu.br

2 Método das Colisões

Nesta seção será descrito o Método das Colisões [5], o qual, em condições específicas, permite a determinação dos n primeiros dígitos de π . No método são necessários dois blocos, B_1 e B_2 , uma superfície plana, horizontal e sem atrito, onde o bloco de menor massa (m) esteja parado entre o bloco de maior massa (M), inicialmente em movimento, e uma parede fixa. Ainda, como condição, nesse sistema os choques devem ser perfeitamente elásticos e sem perdas de energia.

Sejam v_1 e v_2 as velocidades de B_1 e B_2 , respectivamente. Como o sistema não tem perdas de energia, pela conservação da energia cinética:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} = \text{constante.}$$

E como os choques são elásticos, pela conservação do momento linear:

$$mv_1 + Mv_2 = \text{constante.}$$

Seja o caso mais simples, em que $M = m$ e as velocidades de B_1 e B_2 são, em módulo, 0 e v , respectivamente, com $v \neq 0$. Seja também, sem perda de generalidade, o sentido positivo da orientação da velocidade da esquerda para a direita. A Figura 1 mostra as etapas que ocorrem neste caso.

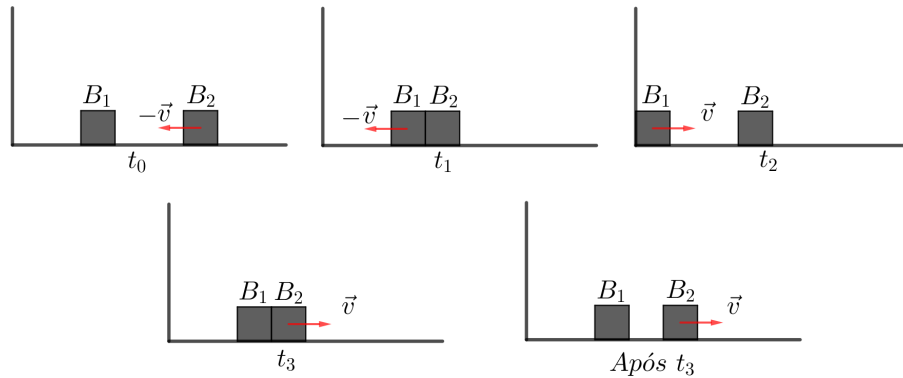


Figura 1: Configuração do sistema em t_0 , t_1 , t_2 , t_3 e após t_3 .

No caso representado, em que $M = m$, após o segundo choque entre os blocos não mais haverá colisões no sistema, já que toda energia cinética de B_1 é transferida para B_2 . Também, em todos os choques entre os blocos no caso representado há transferência total do momento linear. Contudo, isso nem sempre ocorre. Em geral, se $M > m$, nem todo o momento linear é transferido e ambos blocos continuam se movendo, ao contrário do caso anterior.

No caso $M = m$, a quantidade total de choques no sistema é de 3, que é o primeiro dígito de π . Quando $M = 100 \cdot m$ há um total de 31 choques no sistema, que são os dois primeiros dígitos de π . Caso $M = 100^2 \cdot m$ são verificadas 314 colisões, que são os três primeiros dígitos de π . Dessa forma, é possível conjecturar que, quando a razão entre as massas de B_2 e B_1 é 100^{n-1} , $n \in \mathbb{N}$, tem-se que a quantidade de choques é dada pelos n primeiros algarismos de π .

Teorema. Seja uma superfície plana, horizontal e sem atrito e uma parede fixa, de massa infinita, perpendicular à superfície. Considere que todos os choques são perfeitamente elásticos e

não há perda de energia. Sejam B_1 e B_2 blocos de massas m e M , respectivamente. Se B_1 está parado, B_2 está se movimentando em direção a B_1 , com B_1 entre B_2 e a parede, e $M = m \cdot 100^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}$, então o total de choques no sistema equivale aos n primeiros dígitos de π .

3 Ideia da Demonstração

Sejam v_1 e v_2 as velocidades dos blocos B_1 e B_2 , respectivamente, em cada instante do experimento. Após cada choque no sistema, as velocidades v_1 e v_2 assumem novos valores. É possível, então, entender cada novo par de velocidades como um par ordenado em um sistema cartesiano $v_1 \times v_2$. Um ponto P na parte negativa do eixo v_2 representa as velocidades dos blocos B_1 e B_2 antes da primeira colisão: B_1 está em repouso e B_2 move-se em direção a B_1 com uma velocidade V qualquer, $V < 0$. Como a energia cinética se conserva, tem-se:

$$mv_1^2 + Mv_2^2 = MV^2. \tag{1}$$

O gráfico da equação (1) é uma elipse, que representa todos os pares de velocidades v_1 e v_2 que mantêm a energia cinética do sistema constante.

Como o momento linear do sistema se mantém constante, tem-se:

$$mv_1 + Mv_2 = c_1. \tag{2}$$

O gráfico da equação (2) é uma reta com inclinação de $-m/M$. Tal reta poderia estar localizada em qualquer lugar do plano. Contudo, do fato que ela representa todos os pares de velocidades que conservam o momento linear, é possível identificar qual par de velocidades conserva a energia cinética e o momento linear do sistema antes do primeiro choque, representado pelo ponto P . Em outras palavras, construindo a reta definida em (2) passando pelo ponto P e determinando qual é o segundo ponto de interseção entre a reta e a elipse, determina-se quais são as velocidades dos blocos B_1 e B_2 após o primeiro choque.

O ponto P_1 representa o par de velocidades dos blocos após o primeiro choque. É possível perceber que, neste caso, os blocos movem-se em direção à parede, contudo, com $|v_1| > |v_2|$. Assim, o bloco B_1 irá atingir a parede antes de um segundo choque com B_2 .

No instante do choque de B_1 com a parede, a velocidade deste bloco passa a ter o mesmo módulo, contudo, com sentido contrário, enquanto a velocidade de B_2 não se altera. Assim, o novo par de velocidades (P_2) pode ser determinado pela interseção entre a elipse e a reta paralela ao eixo v_1 que passa por P_1 .

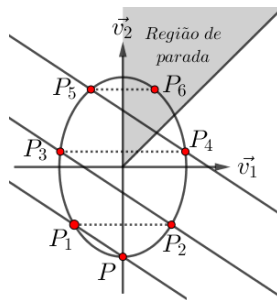


Figura 2: Velocidades de B_1 e B_2 após os choques e região de parada

Construindo uma nova reta conforme representada em (2), contudo, passando agora por P_2 , ao determinar a segunda interseção desta reta com a elipse (P_3) obtém-se as velocidades dos blocos após

o segundo choque entre eles. Da mesma forma, após o segundo choque entre o bloco B_1 e a parede, a velocidade deste bloco passa a ter o mesmo módulo, contudo, com sentido contrário, enquanto a velocidade de B_2 não se altera. Assim, o novo par de velocidades (P_4) pode ser determinado pela interseção entre a elipse e a reta paralela ao eixo v_1 que passa por P_3 . O processo se repete até que $v_1 \geq 0$, $v_2 > 0$ e $v_2 > v_1$, já que, neste caso, não mais existiriam choques entre os blocos, nem entre B_1 e a parede. A região em que $v_1 \geq 0$, $v_2 > 0$ e $v_2 > v_1$ será definida como *região de parada*, representada hachurada na Figura 2.

Seja a mudança de variável tal que $x = \sqrt{m} \cdot v_1$ e $y = \sqrt{M} \cdot v_2$. Desta forma, a equação (1) pode ser reescrita no sistema xy como a circunferência

$$x^2 + y^2 = MV^2, \tag{3}$$

enquanto a reta (2) torna-se

$$y = -\sqrt{\frac{m}{M}} x + c_2. \tag{4}$$

A região de parada é, então, a região compreendida entre o eixo y e a reta $y = \sqrt{\frac{M}{m}} x$.

A representação de (3), (4) e da região de parada no novo sistema de coordenadas xy é ilustrada na Figura 3.

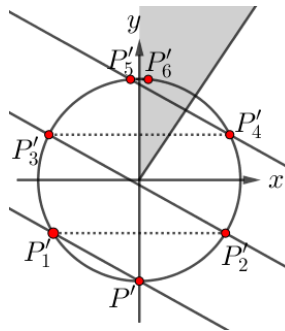


Figura 3: Equações (3) e (4) no sistema xy

Em relação à família de retas que são construídas a partir da equação (4) é possível concluir que todas são paralelas, visto que possuem o mesmo coeficiente angular. Além disso, os segmentos $\overline{P'_{2k-1}P'_{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, são todos paralelos. Dessa forma, os ângulos formados entre tais segmentos e as retas definidas pela equação (4) são congruentes, conforme mostra a Figura 4.

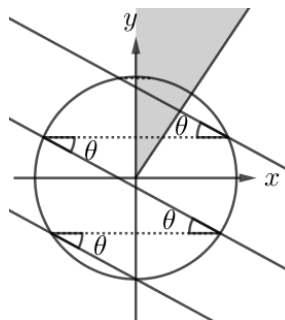


Figura 4: Ângulos entre os segmentos horizontais as retas definidas por (4)

Como os ângulos θ são ângulos inscritos na circunferência, pelo teorema do ângulo central, cada arco na circunferência definido por um ângulo inscrito θ mede 2θ , conforme ilustra a Figura 5.

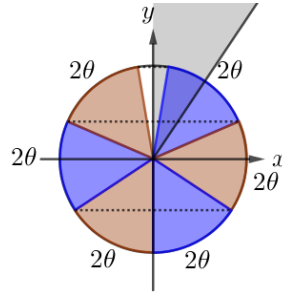


Figura 5: Arcos medindo 2θ na circunferência

Dessa forma, a quantidade total de choques no sistema equivale à quantidade de arcos de medida 2θ que podem ser construídos na circunferência sem que a união destes arcos complete ou ultrapasse a circunferência. Assim, $N \cdot 2\theta < 2\pi \Leftrightarrow N \cdot \theta < \pi$.

Esta conclusão configura-se como um importante instrumento na demonstração, já que o maior natural N que é solução da equação

$$N \cdot \theta < \pi \tag{5}$$

pode ser determinado de maneira mais simples em comparação com a enumeração dos choques.

Para a resolução de (5) se faz necessária a determinação de θ . É importante perceber que a inclinação das retas definidas em (4) é dada por $-\tan \theta$. Assim,

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}}. \tag{6}$$

Quando o valor de θ for potência de 10^{-1} , a equação (5) fornece os primeiros dígitos de π para N , conforme sugere a Tabela 1. Mas isto ocorre quando a razão entre M e m é múltiplo de 100, pois $\arctan x \approx x$ para x suficientemente pequeno.

Tabela 1: Quantidade de choques no sistema

M/m	θ	π/θ	Choques no sistema
1	$\arctan(1/1)$	4	3
10^2	$\arctan(1/10)$	31,52036...	31
10^4	$\arctan(1/10^2)$	314,16973...	314
10^6	$\arctan(1/10^3)$	3.141,59369...	3.141
10^8	$\arctan(1/10^4)$	31.415,92650...	31.415
10^{10}	$\arctan(1/10^5)$	314.159,26536...	314.159

Portanto, tem-se duas possibilidades para o valor N :

$$N = \begin{cases} \frac{\pi}{\theta} - 1, & \text{se } \frac{\pi}{\theta} \in \mathbb{N}; \\ \left\lfloor \frac{\pi}{\theta} \right\rfloor, & \text{se } \frac{\pi}{\theta} \notin \mathbb{N}. \end{cases} \tag{7}$$

Note que o primeiro caso ocorre apenas quando $M = m$. Isto encerra a demonstração.

Os detalhes desta e de outra demonstração, utilizando reflexão de feixes de luz em espelhos, pode ser encontrada em [1].

4 Implementação

A implementação do Método das Colisões em um *software* que permita a visualização do processo, bem como a alteração de parâmetros, apresenta-se como de grande relevância. Uma aplicação desta natureza pode proporcionar o confronto de ideias e a formulação de conjecturas [9]. Assim, uma simulação foi proposta utilizando o *software* GeoGebra, conforme Figura 6.

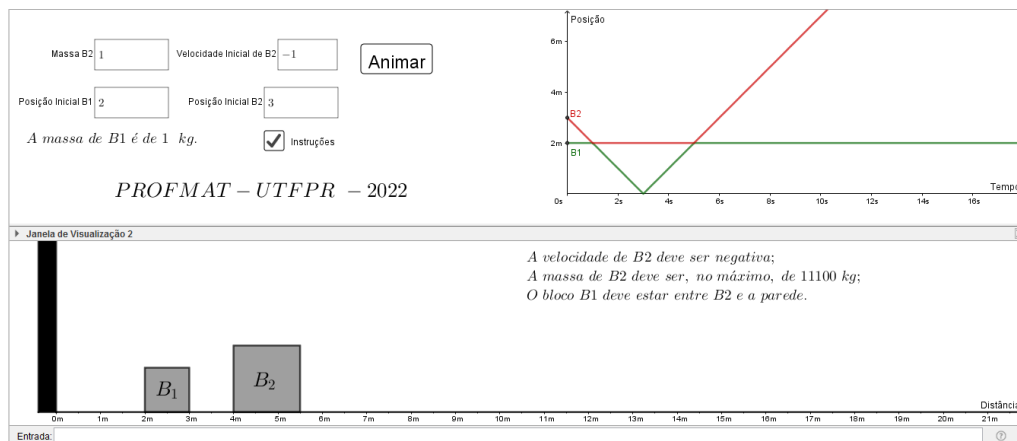


Figura 6: Interface da simulação construída no GeoGebra.

A implementação está disponível na página do GeoGebra:

<https://www.geogebra.org/m/xttbnh2p>.

Ainda que a animação possua algumas limitações, seu uso permite identificar características do Método das Colisões. A primeira a se destacar é o fato de que apenas as massas dos blocos interferem na quantidade de choques, o que pode ser verificado alterando as posições iniciais dos blocos e a velocidade inicial do bloco B_2 na simulação, mas mantendo as massas constantes.

É também possível verificar que, ao passo que a massa de B_2 aumenta, mais frequentes são os choques. Esta característica pode ser percebida tanto no movimento dos blocos quanto no gráfico posição \times tempo, disponibilizado na simulação. Como exemplo, considerando os blocos B_1 e B_2 distando 2 e 4 metros da parede, respectivamente, e a velocidade inicial de B_2 como -1 m/s, se a massa de B_2 é de 20 kg, 12 dos 14 choques acontecem nos 4 primeiros segundos do experimento. Nas mesmas condições, mas se a massa de B_2 é de 2.000 kg, 138 dos 140 choques no sistema ocorrem nos primeiros 4 segundos.

5 Considerações Finais

A utilização do Método das Colisões para a determinação dos dígitos de π é experimentalmente impossível [9]. Tal situação ocorre pois seria necessário estabelecer um ambiente físico ideal, determinar a quantidade d de dígitos que se quer calcular, promover o movimento de objetos, um deles com a massa sendo, por exemplo, de 1 kg e o outro com massa de 100^{d-1} kg e, por fim, contar a quantidade de choques no sistema. Sendo assim, o Método das Colisões se destaca não por sua praticidade ou conceitos matemáticos elaborados envolvidos, mas sim pela curiosa relação de enumeração de colisões entre dois blocos e uma parede fixa resultar nos dígitos de π .

Nesse sentido, o estudo do Método das Colisões poderia ser justificado pela própria beleza envolvida no experimento, uma vez que “o matemático não estuda matemática pura porque é útil; ele estuda-a, porque ele se encanta com ela e ele encanta-se com ela porque ela é bela” [7].

Embora o problema pareça não ter aplicação prática, existe um isomorfismo entre o Método das Colisões [5] e um algoritmo de busca quântica [6]. Esta verificação evidencia a importância do estudo do método, desde sua demonstração até sua implementação em simuladores [3].

Quanto à demonstração do Método, este trabalho apresenta uma demonstração, envolvendo arcos em circunferências, e sugere outra, utilizando feixes de luz em espelhos. E por que demonstrar o método duas vezes? Mais do que responder a mesma pergunta duas vezes, as demonstrações dão um entendimento melhor sobre o que está acontecendo e torna mais fácil responder outras perguntas [8].

Ao se trabalhar com as equações da energia cinética e do momento linear totais do sistema foi possível traçar um paralelo entre as representações geométricas destas equações e ângulos inscritos em uma circunferência. Por outro lado, utilizando a associação entre as distâncias dos blocos até a parede com a localização de um ponto no plano cartesiano, seria possível identificar uma correspondência entre o Método das Colisões e o comportamento de um feixe de luz refletindo entre dois espelhos planos.

Também é possível estudar o Método das Colisões partindo das velocidades dos blocos em cada instante do experimento. Com base neste estudo foi elaborada, no *software* GeoGebra, uma simulação do Método das Colisões, com a qual é possível visualizar cada uma das etapas do experimento, identificando detalhes e características em cada instante.

Em relação à construção da simulação, algumas limitações relacionadas ao *software* GeoGebra foram identificadas, sendo a principal delas relacionada ao processamento dos dados implementados. Uma sugestão para trabalhos futuros é implementar a simulação usando outras linguagens de programação mais robustas, como Python ou C++, por exemplo.

Referências

- [1] I. G. S. Boruch. “Um problema de contagem e o número pi”. Dissertação de mestrado. UTFPR/Curitiba, 2022.
- [2] C. B. Boyer e U. C. Merzbach. **História da Matemática**. Editora Blucher, 2012. ISBN: 978-8521206415.
- [3] A. R. Brown. “Playing Pool with $|\psi\rangle$: from Bouncing Billiards to Quantum Search”. Em: **Quantum** 4 (2020), p. 357.
- [4] H. Eves. **Introdução à história da Matemática**. Editora Unicamp, 2004. ISBN: 978-8526806573.
- [5] G. Galperin. “Playing pool with π (the number π from a billiard point of view)”. Em: **Regular and chaotic dynamics** 8 (2003), pp. 375–394. DOI: 10.1070/RD2003v008n04ABEH000252.
- [6] L. K. Grover. “A fast quantum mechanical algorithm for database search”. Em: **Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing**. 1996, pp. 212–219.
- [7] H. Poincaré. **The value of science: essential writings of Henri Poincaré**. Modern Library, 2012. ISBN: 978-0375758485.
- [8] G. Sanderson. **How colliding blocks act like a beam of light...to compute pi**. YouTube. Acessado em 12/01/2022, <https://youtu.be/brU5yLm9DZM>.
- [9] G. Sanderson. **The most unexpected answer to a counting puzzle**. YouTube. Acessado em 12/01/2022, <https://youtu.be/HEfHFsfGXjs>.