

Simulação numérica para um modelo de ondas com condições de fronteira do tipo Dirichlet, Acústica e Impenetrabilidade

Adriano A. Alcântara¹

Mauro A. Rincon²

Instituto da Computação, PPGI - UFRJ, RJ, Brasil

Haroldo R. Clark³

Departamento de Matemática, UFPar, PI, Brasil

Resumo. Este artigo consiste de uma pequena versão da tese de doutorado relacionada a análise e simulação numérica para três modelos de ondas com condições de fronteira do tipo Dirichlet, Acústica e Impenetrabilidade. Apresentamos aqui o modelo mais geral dentre os três com os resultados de análise e simulação numérica. Para as simulações numéricas, usamos o método dos elementos finitos no espaço (com base linear e quadrática de Lagrange), o método de Crank-Nicolson no tempo e, para cada tempo discreto, o método de Newton é usado para resolver o sistema algébrico não linear. Além disso, a ordem de convergência (sub-ótimo e ótimo) são apresentadas numericamente.

Palavras-chave. Equação de ondas não linear, Condição de fronteira Acústica, Análise numérica, Método de elementos finitos, Método de Crank-Nicolson, Método de Newton.

1 Introdução

Seja Ω um subconjunto aberto limitado do \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, com fronteira suave $\Gamma := \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ tal que $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, $Q := \Omega \times (0, T)$, com T um real positivo arbitrário, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times (0, T)$ e $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times (0, T)$. Este artigo trás um panorama da análise e simulação numérica para uma equação de ondas não linear suplementada com condições iniciais, condição de Dirichlet nula sobre Γ_0 , condição Acústica sobre Γ_1 , e também, condição de impenetrabilidade não linear dissipativa sobre Γ_1 . A saber,

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) - \alpha(t) \Delta u(x, t) + f(u(x, t)) = 0 & \text{em } Q = \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = 0 & \text{sobre } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ g_1(x) \partial_t^2 z(x, t) + g_2(x) \partial_t z(x, t) + g_3(x) z(x, t) = -\partial_t u(x, t) & \text{sobre } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ \partial_\nu u(x, t) = \partial_t z(x, t) - \beta(x, \partial_t u(x, t)) & \text{sobre } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \\ z(x, 0) = z_0(x), \quad \partial_t z(x, 0) = \partial_\nu u_0(x) + \beta(x, u_1(x)) & \text{sobre } \Gamma_1, \end{cases} \quad (1)$$

em que u é o potencial de velocidade de um fluido governado pela primeira equação de ondas, z é o deslocamento normal sobre a fronteira Γ_1 produzido pela reação da fronteira ao excesso de pressão do potencial de velocidade, as funções $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, 3$, e

¹adriano.alcantara@ppgi.ufrj.br

²rincon@dcc.ufrj.br

³hclark@vm.uff.br

$\beta : \Gamma_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são conhecidas, e ν é o vetor normal externo unitário sobre Γ_1 . Aqui, $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ é o usual operador de Laplace e todas as derivadas são no sentido das distribuições de Schwartz.

O trabalho pioneiro trazendo um estudo sobre uma equação de ondas linear com coeficiente constante sujeita às condições de fronteira Acústica foi devido a Beale e Rosencrans [8] em 1974. Imediatamente após este trabalho, os artigos [7] e [6] trouxeram reflexões matemáticas rigorosas para a versão linear da equação de ondas com condições de fronteira Acústica. Após estes trabalhos, o primeiro não linear foi devido a Frota e Goldstein [10] em 2000. A partir deste surgiram muitos outros importantes trabalhos (com versão linear e não linear no domínio ou fronteira) envolvendo condições de fronteira Acústica cujas as referências podem ser vista em Adriano et al.[4].

Até onde conhecemos, o primeiro trabalho de simulação numérica para uma equação de ondas linear com coeficiente variável e condições de fronteira Acústica foi devido a Alcântara et al. [2]. Em [11] em 2018, temos o primeiro trabalho de estimativa de erro na norma H^1 para uma equação de ondas linear com coeficiente constante com condições de fronteira Acústica. Em seguida, o mesmo autor em [12] em 2020 fez uma análise numérica na norma L^2 para a mesma equação anterior, usando a base de Lagrange linear no espaço.

O propósito original deste artigo é apresentar de forma muito resumida a análise e simulação numérica na norma L^2 para o modelo (1) (que é o modelo I da tese [1]). No entanto, em [1], temos explícitos a análise e simulação numérica na norma L^2 referente aos três modelos de ondas com condições de fronteira do tipo Dirichlet, Acústica e Impenetrabilidade. Até onde sabemos, tanto a análise numérica quanto a simulação estavam em aberto em relação a estes modelos. A tese [1] é o primeiro trabalho a contemplar a análise e simulação numérica para equações de ondas não linear com coeficientes variáveis submetidas a condições de fronteira Acústica com não linearidades gerais no domínio e na fronteira. Destacamos que, para os três modelos em [1], publicamos em [2], [4] e [3] os resultados relacionados a existência e unicidade de solução e o decaimento assintótico da energia.

Quando tratamos de problemas envolvendo condições de fronteira não nulas, tal como a fronteira Acústica dependente do tempo, a análise numérica na norma L^2 torna-se mais difícil devido ao acoplamento domínio-fronteira e a teoria do traço de uma função nos espaços de Sobolev. Tais fatores fazem a ordem de convergência no espaço na norma L^2 ser sub-ótima.

Em suma, os resultados teóricos e numéricos na tese [1] amplificam os resultados em relação a [8], [7], [6], [9], [5], [2], [4], [3] e [12].

2 Simulação numérica

Uma vez que temos em Alcântara et al. [4] os resultados que garantem a existência e unicidade de solução do modelo (1), todavia, em geral não conhecemos explicitamente sua solução analítica, então faz-se necessário a análise e simulação numérica para obtermos soluções aproximadas do modelo (1) no espaço e tempo.

Para estabelecer os principais resultados teóricos para o Sistema (1), além dos espaços funcionais usuais, são necessários os seguintes espaços de Hilbert:

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); \gamma_0(v) = 0 \text{ q.s. sobre } \Gamma_0\} \text{ e } H_{\Delta}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); \Delta v \in L^2(\Omega)\}$$

no qual as aplicações traços são estabelecidas respectivamente como (traço zero e um) $\gamma_0 : H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ e $\gamma_1 : H_{\Delta}(\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$. Daqui em diante, os símbolos (\cdot, \cdot) , $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_1}$, $|\cdot|$, $|\cdot|_{\Gamma_1}$ representam os produtos internos e normas nos espaços $L^2(\Omega)$ e $L^2(\Gamma_1)$, respectivamente.

O objetivo desta seção é aplicar um método numérico para calcular o par de soluções numéricas $\{U_h^n, Z_h^n\}$ do modelo (1) e apresentar o teorema de estimativa de erro do caso totalmente discreto.

Considere $S_h^k(\Omega) = \{v \in C(\bar{\Omega}); v \in P_k(\mathcal{E}), \forall \mathcal{E} \in \mathcal{T}_h; v|_{\Gamma_0} = 0\}$ e $S_h^k(\Gamma_1) = \gamma_0(S_h^k(\Omega))$, os espaços de elementos finitos, onde $P_k(\mathcal{E})$ denota o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a k sobre \mathcal{E} ,

\mathcal{T}_h é uma malha de $\bar{\Omega}$ e \mathcal{E} é um elemento finito da família \mathcal{T}_h , no qual o índice h representa o tamanho da malha definido por $h = h_\Omega := \max\{h_\mathcal{E}; \mathcal{E} \in \mathcal{T}_h\}$ tal que $h_\mathcal{E} = \text{diam } \mathcal{E} = \sup\{|x - y|; x, y \in \mathcal{E}\}$. Além disso, tomamos $J_h = \{J \subset \Gamma_1; \text{ existe algum } \mathcal{E} \in \mathcal{T}_h \text{ em que } J = \mathcal{E} \cap \Gamma_1\}$ e assumimos que J_h satisfaz a condição de ser uma malha sobre Γ_1 . Denominamos J_h a malha herdada de \mathcal{T}_h , no qual o tamanho da malha h_{Γ_1} é definido de modo análogo a h_Ω .

Concernente a discretização temporal, seja $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ uma partição uniforme de $[0, T]$, com $t_n = n\Delta t$ para $n = 0, \dots, N$, onde $\Delta t = T/N$ e $N \in \mathbb{N}$ (fixo) é o número de subintervalos do compacto $[0, T]$. Além disso, denotamos o ponto médio de cada subintervalo por $t_{n-\frac{1}{2}}$, em que $t_{n-\frac{1}{2}} = (t_n + t_{n-1})/2$, e dada uma função Υ qualquer definida sobre essa discretização, estabelecemos a seguinte notação: $\Upsilon^n := \Upsilon(t_n)$, $\hat{\Upsilon}^n := \frac{\Upsilon^n + \Upsilon^{n-1}}{2}$ e $\bar{\partial}\Upsilon^n := \frac{\Upsilon^n - \Upsilon^{n-1}}{\Delta t}$.

Motivados por Baker [5], para definir o problema totalmente discreto relacionado à formulação variacional do modelo (1), utilizaremos o método de Crank-Nicolson Galerkin (o qual consiste em utilizar o método dos elementos finitos no espaço e diferenças finitas (Crank-Nicolson) no tempo). Para tal, necessitamos transformar as equações hiperbólicas de segunda ordem em sistemas parabólicos. Com isso, para cada $n \in \{1, \dots, N\}$, o problema não linear totalmente discreto é determinar $U_h^n, V_h^n \in S_h^k(\Omega)$ e $Z_h^n, R_h^n \in S_h^k(\Gamma_1)$, tais que

$$\begin{cases} (\bar{\partial}V_h^n, \phi) + \alpha^{n-\frac{1}{2}}(\nabla\hat{U}_h^n, \nabla\phi) - \alpha^{n-\frac{1}{2}}(\hat{R}_h^n, \phi)_{\Gamma_1} + \alpha^{n-\frac{1}{2}}(\beta(\hat{V}_h^n), \phi)_{\Gamma_1} \\ \quad + (f(\hat{U}_h^n), \phi) = 0, \\ (\hat{V}_h^n, \psi)_{\Gamma_1} + (g_1\bar{\partial}R_h^n, \psi)_{\Gamma_1} + (g_2\hat{R}_h^n, \psi)_{\Gamma_1} + (g_3\hat{Z}_h^n, \psi)_{\Gamma_1} = 0, \\ \bar{\partial}U_h^n = \hat{V}_h^n, \quad \bar{\partial}Z_h^n = \hat{R}_h^n, \end{cases} \tag{2}$$

para todo $\phi \in S_h^k(\Omega)$ e $\psi \in S_h^k(\Gamma_1)$, onde $U_h^n \approx u(t_n)$, $V_h^n \approx u'(t_n)$, $Z_h^n \approx z(t_n)$ e $R_h^n \approx z'(t_n)$.

A partir do sistema (2), em Alcântara et al. [4], encontram-se todas as contas de como chegamos num sistema matricial acoplado não linear e em seguida num sistema algébrico não linear para cada passo de tempo $n \in \{1, \dots, N\}$. Além disso, como tomamos os dados iniciais para iniciar este sistema tal como usamos o método de Newton para resolvê-lo em cada tempo discreto.

Nosso objetivo agora é apresentar um dos principais teoremas da tese [1] em relação a análise numérica, ou seja, o teorema para o caso totalmente discreto do modelo (1). Para tal, adicionamos algumas hipóteses além das estabelecidas no teorema de existência e unicidade (ver [4]), tais quais

► Suponha que $\dim \Omega = 2, 3$ (dimensão do domínio Ω); (H.1)

► Seja $\alpha \in C^1([0, T])$ e considere $\beta(x, s)$ contínua $\forall x \in \Gamma_1$ para cada $s \in \mathbb{R}$ fixado e que existe $L_\beta > 0$, tal que $|\beta(x, s) - \beta(x, r)|_{\mathbb{R}} \leq L_\beta |s - r|_{\mathbb{R}}$, $\forall x \in \Gamma_1; s, r \in \mathbb{R}$. Além disso,

$\beta(x, 0) = 0$, $[\beta(x, s) - \beta(x, r)](s - r) \geq \beta_0(s - r)^2$ com $\beta_0 > 0$, para todo $r, s \in \mathbb{R}$

e quase sempre $x \in \Gamma_1$. Agora, considere também que para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ existem

$\bar{g}_i, \tilde{g}_i \in \mathbb{R}^+$ tais que $0 < \bar{g}_i \leq g_i(x) \leq \tilde{g}_i$, para todo $x \in \Gamma_1$. (H.2)

Nosso objetivo agora é estimar o erro entre $\{U_h^n, V_h^n, Z_h^n, R_h^n\}$ (solução totalmente discreta) e $\{u(t_n), u'(t_n), z(t_n), z'(t_n)\}$ (solução exata) seguindo as ideias de [14] e [5], que consistem em comparar ambas as soluções com as projeções de Ritz $\{P_1 u(t_n), (P_1 u)'(t_n), P_2 z(t_n), (P_2 z)'(t_n)\}$. Ou seja, $U_h^n - u(t_n) = \zeta_u(t_n) + \eta_u(t_n)$, $V_h^n - u'(t_n) = \zeta_{u'}(t_n) + \eta'_{u'}(t_n)$, $Z_h^n - z(t_n) = \zeta_z(t_n) + \eta_z(t_n)$ e $R_h^n - z'(t_n) = \zeta_{z'}(t_n) + \eta'_{z'}(t_n)$. As projeções P_1 e P_2 e todos os resultados e definições para " ζ " e " η " encontram-se estabelecidos em [1].

Teorema 2.1. *Suponha as hipóteses do Teorema 1 (em [4]) e as hipóteses (H.1) e (H.2) válidas. Sejam $\{u^n, z^n\}$ e $\{U_h^n, V_h^n, Z_h^n, R_h^n\}$ soluções de (1) e (2), respectivamente. Além disso, assuma que $\Delta t < \min\{1, \alpha_0/(2L_f^2 c_\Omega^2)\}$, $0 < h < 1$ e para algum $1 \leq r \leq k$*

$$u, u' \in L^\infty(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \cap H^{r+1}(\Omega)); \quad u'' \in L^2(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \cap H^{r+1}(\Omega)); \quad (3)$$

$$u''' \in L^2(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)), \quad u^{iv} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)); \quad (4)$$

$$z, z' \in L^\infty(0, T; H^{r+1}(\Gamma_1)); \quad z'' \in L^2(0, T; H^{r+1}(\Gamma_1)); \quad z''', z^{iv} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)). \quad (5)$$

Tomando u_{0h}, u_{1h} em $S_h^k(\Omega)$ e z_{0h}, z'_{0h} em $S_h^k(\Gamma_1)$ tais que

$$|\zeta_{u'}^0| + |\nabla \zeta_u^0| + |\zeta_{z'}^0|_{\Gamma_1} + |\zeta_z^0|_{\Gamma_1} \leq ch^{r+\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

Então, existe $c(u, z) > 0$, tal que

$$\max_{0 \leq \tau \leq N} \left\{ |V_h^\tau - u'(t_\tau)| + |U_h^\tau - u(t_\tau)| + |R_h^\tau - z'(t_\tau)|_{\Gamma_1} + |Z_h^\tau - z(t_\tau)|_{\Gamma_1} \right\} \leq c(u, z) \left(h^{r+\frac{1}{2}} + \Delta t^2 \right).$$

Prova. Ver em Alcântara [1].

3 Resultados numéricos

Nesta seção, apresentamos os resultados numéricos oriundos da aplicação do método de elementos finitos (com bases de Lagrange linear e quadrática) na parte espacial, diferenças finitas (Crank-Nicolson) na parte temporal e, para cada tempo discreto, o método de Newton para resolver o sistema algébrico não linear. Toda a implementação numérica foi feita usando o Matlab. Os exemplos numéricos são apresentados considerando várias discretizações no espaço e no tempo, onde são exibidos os erros, a ordem de convergência e o gráfico das soluções numéricas.

Para as simulações, seja o domínio computacional $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ com fronteiras $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1; y = 0\}$ e $\Gamma_0 = \Gamma - \Gamma_1$. Tomamos o tempo final $T = 1$. A seguir, sejam os dados de entrada associados ao modelo (1), isto é,

$$\alpha(t) = 1 + e^{-t}, \quad g_1 = g_2 = g_3 = 1, \quad (7)$$

$$u_0(x, y) = 4(x^a - x)(y^a - 1), \quad u_1(x, y) = 0, \quad z_0(x) = \sin(\pi x), \quad z_1(x) = 0,$$

$$f(s) = \arctan(s), \quad \beta(x, s) = (1 + e^{-x^2})(\arctan(s) + s), \quad (8)$$

com a uma constante real positiva, sendo escolhida apropriadamente para atender à regularidade desejada para as condições iniciais. Vamos definir quatro exemplos, cada exemplo associado com uma escolha de a e uma base do espaço de elementos finitos, tais escolhas são apresentadas na Tabela 1. A motivação para tais escolhas são apresentadas na Tabela 2. Cabe ressaltar que, as funções $\alpha(t)$, $f(s)$ e $\beta(x, s)$ escolhidas, satisfazem as hipóteses do Teorema 2.1.

Tabela 1: Exemplos com as escolhas da base e constante $a > 0$.

ex_1	ex_2	ex_3	ex_4
base linear	base linear	base quadrática	base quadrática
$a = 1.75$	$a = 2.5$	$a = 2.51$	$a = 3.5$

Devido ao acoplamento domínio-fronteira e as regularidades em relação a função $u(t)$, pelo resultado teórico de análise numérica, ver Teorema (2.1), esperamos obter no espaço e tempo ordem de convergência (sub-ótima no espaço e ótima no tempo) $\mathcal{O}(h^{k+\frac{1}{2}} + \Delta t^2)$, em que k é o grau da base polinomial dos espaços de elementos finitos. No entanto, destacamos algo a seguir.

Observação 3.1. [Convergência ótima] Conforme observado em [13], se exigirmos mais regularidade da solução $u(t)$, podemos contornar a perda de ordem de convergência no espaço, e atingir uma ordem de convergência ótima na norma L^2 , ou seja, $\mathcal{O}(h^{k+1})$. Para isso, por exemplo, [13] demandou $u(t) \in W_\infty^{k+1}(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ em vez de $u(t) \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$, em que $W_\infty^{k+1}(\Omega) = \{v \in L^\infty(\Omega); D^\alpha v \in L^\infty(\Omega); |\alpha| \leq k + 1\}$. A tabela 2 exemplifica esta fenômeno convergência sub-ótima e ótima atrelando a regularidade.

Tabela 2: Ordem de convergência na norma L^2

opções	regularidades	erro L^2
$\frac{3}{2} < a < 2$	$u(t) \in H^2, u(t) \notin H^3, u(t) \notin W_\infty^2$	$h^{1.5}$ (base linear)
$2 < a \leq \frac{5}{2}$	$u(t) \in H^2, u(t) \notin H^3, u(t) \in W_\infty^2$	h^2 (base linear)
$\frac{5}{2} < a < 3$	$u(t) \in H^3, u(t) \notin H^4, u(t) \notin W_\infty^3$	$h^{2.5}$ (base quadrática)
$3 < a \leq \frac{7}{2}$	$u(t) \in H^3, u(t) \notin H^4, u(t) \in W_\infty^3$	h^3 (base quadrática)

Problema não homogêneo

Uma vez que a solução exata do modelo (1) não é conhecida, consideraremos sua versão não homogênea (adicionando termos fonte no lado direito) para validar a implementação e investigar as ordens de convergências dos erros E_1, \dots, E_4 , definidos em (9). Nesse sentido, consideramos a solução exata como $u(x, y, t) = (x^a - x)(y^a - 1)(t^2 + 4)$. Construímos a função $z(x, t)$ a partir da equação (1)₄, uma vez que u and β já foram dadas.

Seguindo na direção do Teorema 2.1 e da Observação 3.1, a Tabela 2 mostra a relação entre a regularidade de $u(t)$ e a ordem de convergência (sub-ótima e ótima) na norma L^2 para cada base de elementos finitos utilizada. Note que, as escolhas de a na Tabela 1 estão associadas com as regularidades e as ordens de convergências indicadas na Tabela 2. A demonstração das regularidades indicadas na tabela abaixo estão provadas em [1]. Nas tabelas a seguir mostraremos os valores dos erros E_1, \dots, E_4 referindo-se aos exemplos ex_i escolhidos na Tabela 1, ou seja, para $i = 1, 2, 3$ e 4 ,

$$\begin{aligned}
 E_1(ex_i) &:= \max_{0 \leq n \leq N} |u^n - U_h^n|_{L^2(\Omega)}, & E_2(ex_i) &:= \max_{0 \leq n \leq N} |z^n - Z_h^n|_{L^2(\Gamma_1)}, \\
 E_3(ex_i) &:= \max_{0 \leq n \leq N} |u'(t_n) - V_h^n|_{L^2(\Omega)} & \text{e} & E_4(ex_i) := \max_{0 \leq n \leq N} |z'(t_n) - R_h^n|_{L^2(\Gamma_1)}.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

A Tabela 3 mostra a ordem de convergência quadrática no tempo, comprovando o resultado do Teorema 2.1, uma vez que o método de Crank-Nicolson foi usando no tempo.

Tabela 3: Erro e a ordem de convergência no tempo com $h = [(2^{-11})^2 + (2^{-11})^2]^{\frac{1}{2}}$ relacionado ao par de funções em (8), usando a base linear.

Par de função $\{f, \beta\}$ em (8)				
Δt	$E_1(ex_2)$	ordem	$E_2(ex_2)$	ordem
2^{-3}	9.690e-4		8.197e-4	
2^{-4}	2.424e-4	1.999	2.049e-5	1.999
2^{-5}	6.059e-5	2.000	5.125e-5	1.999
2^{-6}	1.523e-5	1.991	1.281e-5	1.999

A Tabela 4 mostra os resultados de erro e a ordem de convergência no espaço corroborando com os resultados do Teorema 2.1 e da Observação 3.1. Para o domínio $\Omega = (0, 1)^2$ escolhido, consideramos malhas uniformes formadas por quadrados de lados $1/Nx$, tal que $Nx \in \{2^3, \dots, 2^6\}$. Assim, h que é o diâmetro de cada elemento, é dado por $[(1/Nx)^2 + (1/Nx)^2]^{\frac{1}{2}}$.

Observe que, ex_1 e ex_3 estão associados com as escolhas dos casos sub-ótimos, e ex_2 and ex_4 com os casos ótimos, ver Tabelas 1 e 2. Além disso, nos exemplos ex_1 e ex_2 a escolha da base do espaço de elementos finitos é linear, enquanto que, em ex_3 e ex_4 ela é quadrática.

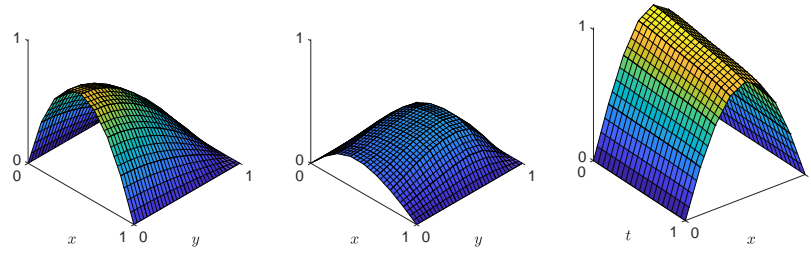


Figura 1: Base linear.

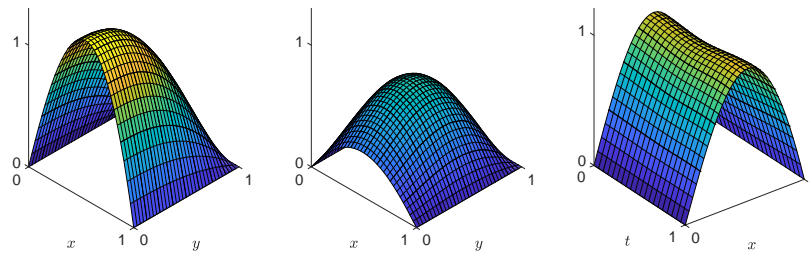


Figura 2: Base quadrática.

Tabela 4: Erro e a ordem de convergência no espaço com $\Delta t = 2^{-15}$ relacionado ao par de funções $\{f, \beta\}$ em (8).

Base linear									
h	$E_1(ex_1)$	ordem	$E_2(ex_1)$	ordem	$E_1(ex_2)$	ordem	$E_2(ex_2)$	ordem	
$2^{-\frac{5}{2}}$	7.856e-3		8.303e-3		1.265e-2		9.139e-3		
$2^{-\frac{7}{2}}$	2.051e-3	1.937	2.009e-3	2.046	3.159e-3	2.002	2.230e-3	2.034	
$2^{-\frac{9}{2}}$	5.533e-4	1.890	4.995e-4	2.008	7.892e-4	2.000	5.532e-4	2.011	
$2^{-\frac{11}{2}}$	1.621e-4	1.771	1.312e-4	1.928	1.972e-4	2.000	1.379e-4	2.004	
Base quadrática									
h	$E_1(ex_3)$	ordem	$E_2(ex_3)$	ordem	$E_1(ex_4)$	ordem	$E_2(ex_4)$	ordem	
$2^{-\frac{5}{2}}$	1.792e-4		4.203e-4		4.585e-4		3.808e-4		
$2^{-\frac{7}{2}}$	2.418e-5	2.890	5.531e-5	2.925	5.734e-5	2.999	5.018e-5	2.924	
$2^{-\frac{9}{2}}$	3.323e-6	2.863	7.145e-6	2.952	7.169e-6	2.999	6.423e-6	2.965	
$2^{-\frac{11}{2}}$	5.310e-7	2.645	9.487e-7	2.913	8.962e-7	2.999	8.101e-7	2.987	

Problema homogêneo

Uma vez validada a implementação, voltamos nossa atenção para o nosso modelo em estudo. Apresentamos as soluções numéricas para os dados de entrada relacionados às escolhas sub-ótimas, ou seja, ex_1 e ex_3 - ver Tabela 1.

As Figuras 1 e 2 mostram respectivamente as soluções aproximadas (da esquerda para a direita) U_h^0, U_h^N e $\{Z_h^n\}_{n=0}^N$ para as bases linear e quadrática, associadas com os os dados de entradas (7) e (8). Nestas figuras foram considerados $T = 1, \Delta t = 1/20, N = T/\Delta t$ e $h = [(1/8)^2 + (1/8)^2]^{\frac{1}{2}}$.

4 Considerações Finais

A tese Alcântara [1] trás resultados inovadores em relação a literatura atual. Este é o primeiro trabalho a contemplar a análise numérica na norma L^2 para modelos de ondas não lineares com condições de fronteira Acústica com não linearidades gerais.

Referências

- [1] Adriano A. Alcântara. “Análise e simulação numérica para três modelos de ondas com condições de fronteira do tipo Dirichlet, Acústica e Impenetrabilidade”. Tese de dout. Instituto da Computação - PPGI - Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2021.
- [2] Adriano A. Alcântara, Haroldo R. Clark e Mauro A. Rincon. “Theoretical analysis and numerical simulation for a hyperbolic equation with Dirichlet and acoustic boundary conditions”. Em: *Computational and Applied Mathematics* 37.4 (2018), pp. 4772–4792.
- [3] Adriano A. Alcântara et al. “Nonlinear wave equation with Dirichlet and Acoustic boundary conditions: theoretical analysis and numerical simulation”. Em: *Computational and Applied Mathematics* 141 (2022).
- [4] Adriano A. Alcântara et al. “On a nonlinear problem with Dirichlet and Acoustic boundary conditions”. Em: *Applied Mathematics and Computation* 411 (2021), p. 126514.
- [5] Garth A. Baker. “Error Estimates for Finite Element Methods for Second Order Hyperbolic Equations”. Em: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 13.4 (1976), pp. 564–576.
- [6] J. Thomas Beale. “Acoustic Scattering from Locally Reacting Surfaces”. Em: *Indiana University Mathematics Journal* 26.2 (1977), pp. 199–222.
- [7] J Thomas Beale. “Spectral properties of an acoustic boundary condition”. Em: *Indiana University Mathematics Journal* 25.9 (1976), pp. 895–917.
- [8] J Thomas Beale e Steven I Rosencrans. “Acoustic boundary conditions”. Em: *Bulletin of the American Mathematical Society* 80.6 (1974), pp. 1276–1278.
- [9] Todd Dupont. “ L^2 -Estimates for Galerkin Methods for Second Order Hyperbolic Equations”. Em: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 10.5 (1973), pp. 880–889.
- [10] Cícero Lopes Frota e Jerome A Goldstein. “Some nonlinear wave equations with acoustic boundary conditions”. Em: *Journal of Differential Equations* 164.1 (2000), pp. 92–109.
- [11] David Hipp, Marlis Hochbruck e Christian Stohrer. “Unified error analysis for non-conforming space discretizations of wave-type equations”. Em: *IMA Journal of Numerical Analysis* 39.2 (2018), pp. 1206–1245.
- [12] David Hipp e Balázs Kovács. “Finite element error analysis of wave equations with dynamic boundary conditions: L_2 estimates”. Em: *IMA Journal of Numerical Analysis* 41.1 (2020), pp. 638–728.
- [13] T. Kashiwabara et al. “Well-Posedness, Regularity, and Convergence Analysis of the Finite Element Approximation of a Generalized Robin Boundary Value Problem”. Em: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 53.1 (2015), pp. 105–126.
- [14] Mary Fanett Wheeler. “ L_∞ estimates of optimal orders for Galerkin methods for one-dimensional second order parabolic and hyperbolic equations”. Em: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 10.5 (1973), pp. 908–913.