Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Extensão do Princípio de Invariância para Sistemas Positivos Chaveados

Michele C. Valentino[1]
UTFPR, Cornélio Procópio, PR
Luís F. C. Alberto, Yuri C. S. Ribeiro[2]
USP, São Carlos, SP
Wendhel R. Coimbra[3]
UFPB, Rio Tinto, PB

Resumo. Neste trabalho, apresentamos uma extensão do princípio de invariância para a classe de sistemas positivos chaveados. Nessa extensão, uma função V, a qual desempenha o mesmo papel que a função de Lyapunov, não precisa ser positiva e sua derivada ao longo das soluções chaveadas positivas pode assumir valores positivos em alguns conjuntos, os quais não são necessariamente limitados. Este novo resultado nos permite analisar sistemas que ainda não puderam ser analisados com os resultados da literatura, bem como melhorar as estimativas de atratores e áreas de atração de alguns problemas. Um exemplo numérico é apresentado para mostrar a efetividade do resultado.

Palavras-chave. Princípio de Invariância, Sistemas Positivos, Atrator, Área de Atração

1 Introdução

Vários são os eventos reais que podem ser modelados por sistemas chaveados [3, 5, 8]. Por isso, estudar resultados de estabilidade e estabilização para esta classe de sistemas ainda é muito necessário. Em [1] foi apresentado um princípio de invariância para sistemas chaveados, o qual se tornou uma ferramenta poderosa para analisar o comportamento assintótico da solução do sistema e não a estabilidade de um ponto de equilíbrio específico. Em [7] foram apresentadas extensões do resultado acima citado, as quais puderam analisar a solução de um grupo maior de sistemas não lineares, devido ao fato de não exigirem que as derivadas das funções auxiliares, as quais desempenham a mesma tarefa que as funções de Lyapunov, assumam somente valores negativos. Mesmo com o avanço apresentado em [7], o resultado não forneceu procedimento para encontrar as funções auxiliares satisfazendo as restrições dos teoremas, além de serem somente aplicados quando todos os subsistemas do sistema chaveado são estáveis. Em [6], foi apresentado um procedimento que nos auxilia a encontrar as funções auxiliares e o resultado ainda passou a ser aplicado mesmo na presença de subsistemas instáveis. Neste trabalho, restringimos a classe de sistemas e então propomos avanços nos resultados apresentados em [7], no sentido de que, além da função auxiliar não ser necessariamente positiva, sua derivada ao longo das soluções positivas pode assumir valores positivos em conjuntos ilimitados. Por esta razão, esperamos conseguir melhorar as estimativas das áreas de atração e seus respectivos atratores, além de obter estas estimativas para aqueles sistemas que ainda não possuem uma função de Lyapunov. No decorrer do texto consideramos $\bar{\Omega}$ sendo o fecho e Ω^c o complemento do conjunto Ω, respectivamente, $int(\mathbb{R}^n_+) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, 1 \leq i \leq n\}$ e $Bd(\mathbb{R}^n_+) = \mathbb{R}^n_+ - int(\mathbb{R}^n_+)$.

[1]valentino@utfpr.edu.br
[2]lfcalberto@usp.br, yuricandido@gmail.com
[3]wendhel@dcx.ufpb.br

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0053

2 Preliminares

Neste trabalho, consideramos a seguinte classe de sistemas chaveados positivos:

$$\dot{x} = f_{\sigma(t)}(x(t)), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor estado, σ é uma função chamada de lei de chaveamento com domínio sendo o conjunto dos números reais com imagem $\mathcal{P} = \{1, 2, \cdots, N\}$ com N sendo o número de subsistemas e f_p um campo vetorial completo $\mathcal{C}^1$ do $\mathbb{R}^n$ para todo $p \in \mathcal{P}$, os quais ainda satisfazem:

$$\forall x \in Bd(\mathbb{R}^n_+) : x_i = 0 \rightarrow f_{pi}(x_i) \geq 0, \ \forall p \in P, \tag{2}$$

em que f_{pi} representa a linha i do campo vetorial f_p. A condição (2) é necessária e suficiente para que cada subsistema p seja positivo, ou seja, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$, a solução de cada subsistema permaneça no conjunto $\mathbb{R}^n_+$ para todo $t \geq 0$. Quando conveniente, os argumentos de $x(t)$ serão omitidos. Seja $\{\tau_k\}$ uma sequência de tempos de chaveamentos consecutivos associados a σ e $I_p = \{t \in [\tau_k, \tau_{k+1}) : \sigma(\tau_k) = p\}$ a união dos intervalos onde o sistema p é ativado. Assumimos que para todo $T > 0$ e $p \in \mathcal{P}$ existe um k tal que $\sigma(\tau_k) = p$ e $\tau_k > T$. O conjunto de todas as soluções será denotado por $\mathcal{S}$. Chamaremos $\varphi_\sigma(t, x_0)$ de solução de (1) começando em x_0 no tempo $t = 0$ através da lei de chaveamento σ. No que segue, omitiremos σ da notação $\varphi_\sigma(t, x_0)$.

Os resultados aqui obtidos são para uma classe específica de chaveamentos, a qual será apresentada a seguir.

Definição 2.1. *Dizemos que a lei de chaveamento é dwell time se existe um sequência de tempos de chaveamento $\{\tau_k\}$ e $T > 0$ tal que*

$$\inf_k (\tau_{k+1} - \tau_k) \geq T. \tag{3}$$

O número T é chamado de dwell time para $\varphi(t, x_0)$ e o conjunto de todas as soluções através de uma lei de chaveamento dwell time é denotado por $\mathcal{S}_{dwell} \subset \mathcal{S}$.

Definição 2.2. (Invariância Fraca) *Um conjunto compacto $\mathcal{M}$ é fracamente invariante com respeito ao sistema chaveado (1) se para cada $x_0 \in \mathcal{M}$ existe um índice $p \in \mathcal{P}$, uma solução $\varphi(t, x_0)$ do campo vetorial $f_p(x)$ e um número real $b > 0$ tal que $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{M}$ para cada $t \in [-b, 0]$ ou $t \in [0, b]$.*

A solução chaveada $\varphi(t, x_0)$ de (1) é atraída para um conjunto compacto $\mathcal{M}$ se para cada $\epsilon > 0$ existe um tempo $T > 0$ tal que

$$\varphi(t, x_0) \in B(\mathcal{M}, \epsilon) \text{ para } t \geq T \tag{4}$$

em que $B(\mathcal{M}, \epsilon) = \cup_{a \in \mathcal{M}} B(a, \epsilon)$. Claramente $\varphi(t, x_0)$ é atraída para $\mathcal{M}$ se e somente se

$$\lim_{t \to \infty} dist(\varphi(t, x_0), \mathcal{M}) = 0. \tag{5}$$

Definição 2.3. (Ponto de acumulação) *Seja $\varphi(t, x_0) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma curva contínua. Um ponto q é um ponto limite de $\varphi(t, x_0)$ se existe uma sequência $\{t_k\}_{k \in N}$, com $t_k \to \infty$, quando $k \to \infty$ tal que $\lim_{k \to \infty} \varphi(t_k, x_0) = q$. O conjunto de todos os pontos de acumulação de $\varphi(t, x_0)$ será denotado por $\omega^+(x_0)$.*

Proposição 2.1. (Propriedades do conjunto limite) *Seja $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ uma solução chaveada limitada de (1) para $t \geq 0$. Então, $\omega^+(x_0)$ é não vazio, compacto e fracamente invariante. Mais ainda, $\varphi(t, x_0)$ é atraída para $\omega^+(x_0)$.*

Demonstração. Veja em [1]. $\square$

3 Extensão do Princípio de Invariância para Sistemas Positivos Chaveados

Nesta seção, apresentamos a extensão do princípio de invariância para a classe de sistemas positivos chaveados. Este novo resultado nos permite analisar alguns sistemas, os quais não puderam ser analisados com os resultados da literatura, e melhorar as estimativas de algumas áreas de atração e atrator.

Para a obtenção do resultado principal, consideramos a existência de uma única função do tipo Lyapunov V para todos os subsistemas do sistema chaveado (1). Seja $\Omega_a = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : V(x) \leq a\}$ um subconjunto do $\mathbb{R}^n_+$, $C_p = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \nabla V(x) f_p(x) > 0\}$ o conjunto onde a derivada da função V ao longo das trajetórias do sistema p é positiva e $E_p = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \nabla V(x) f_p(x) = 0\}$ o conjunto onde essa derivada é igual a zero. Defina $C = \cup_{p\in\mathcal{P}} C_p$ e $E = \cup_{p\in\mathcal{P}} E_p$ e considere o próximo resultado que fornece a extensão do princípio de invariância para a classe de sistemas considerada.

Teorema 3.1. (Extensão do Princípio de Invariância) *Considere o sistema chaveado* (1) *e a função* $V(x) : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$. *Suponha a existência de um número real* ℓ *satisfazendo* $\sup_{x\in C} V(x) \leq \ell < \infty$ *e considere* $\Omega_\ell = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : V(x) \leq \ell\}$. *Finalmente, seja* $\mathcal{M}$ *a união de todos os conjuntos fracamente invariantes contidos em* $E \cup \Omega_\ell$. *Então, toda solução* $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ *é atraída para* $\mathcal{M}$.

Demonstração. Primeiramente, considere $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $x_0 \in \Omega_\ell$ e $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ uma solução limitada do sistema chaveado positivo (1). Uma vez que a solução é limitada e o sistema chaveado é positivo, então $\varphi(t, x_0) \in \mathbb{R}^n_+$ para todo $t \geq 0$. Suponha a existência de um $t^* \in [0, +\infty)$ tal que $\varphi(t^*, x_0) \notin \Omega_\ell$. Pela continuidade da V e da solução, existe $\bar{t}$ tal que $V(\varphi(\bar{t}, x_0)) = \ell$ e $V(\varphi(t, x_0) > \ell$ para todo $t \in (\bar{t}, t^*]$, mas isso é uma contradição pois $C \in \Omega_\ell$, ou seja, $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ e $\nabla V(x).f_p(x(t)) \leq 0$ fora de Ω_ℓ para todo $p \in \mathcal{P}$. Dessa forma, $\varphi(t, x_0) \in \Omega_\ell$ para todo $t \geq 0$ e então é atraída para $\omega^+(x_0)$. Logo, a solução é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_ℓ. Agora, considere $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $x_0 \notin \Omega_\ell$ e $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ uma solução chaveada do sistema positivo chaveado (1). Se $\varphi(t, x_0)$ entra em Ω_ℓ para algum t, então o resultado segue da primeira parte dessa demonstração. Suponha que a solução limitada $\varphi(t, x_0) \notin \Omega_\ell, \forall t \geq 0$. Uma vez que $\ell \geq \sup_{x\in C} V(x)$, $\varphi(t, x_0) \notin C \subset \Omega_\ell, \forall t \geq 0$, isto é, $V(\varphi(t, x_0)) > \ell$ e $\nabla V(\varphi(t, x_0)) f_p(\varphi(t, x_0)) \leq 0, \forall t \geq 0, \forall p \in \mathcal{P}$. Concluimos que $V(\varphi(t, x_0))$ é uma função de t não crescente limitada inferiormente. Então, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $r = \lim_{t\to\infty} V(\varphi(t, x_0))$. Uma vez que a solução é limitada, $\omega^+(x_0)$ é não vazio. Seja $a \in \omega^+(x_0)$, então existe uma sequência $\{t_k\}$ com $t_k \to \infty$ quando $k \to \infty$ tal que $\varphi(t_k, x_0) \to a$. A continuidade de V assegura que $V(\varphi(t_k, x_0)) \to V(a)$ quando $k \to \infty$, então $V(a) = r$, $\forall a \in \omega^+(x_0)$. Finalmente, pela Proposição 2.1, $\omega^+(x_0)$ é um conjunto fracamente invariante. Assim, existe um intervalo $[\alpha, \beta]$ contendo a origem e uma função $\upsilon(t)$ tal que $\upsilon(0) = a$, $\upsilon(t) \in \omega^+(x_0), \forall t \in [\alpha, \beta]$ e $\exists j \in \mathcal{P}$ tal que $\dot{\upsilon}(t) = f_j(\upsilon(t)), \forall t \in [\alpha, \beta]$. Então, $V(\upsilon(t)) = V(a) = r$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$ e $\nabla V(\upsilon(t)) f_j(\upsilon(t)) = 0$ $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Particularmente, para $t = 0$ temos $\nabla V(\upsilon(0)) f_j(\upsilon(0)) = \nabla V(a) f_j(a) = 0$. Logo $a \in E$. Então $\omega^+(x_0) \subset E$ e a solução é atraída para um conjunto fracamente invariante em E.

Portanto, toda solução limitada $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ é atraída para $\mathcal{M}$. □

Corolário 3.1. *Suponha a existência de números reais* $\tilde{\ell} < \tilde{L}$ *tais que* $\tilde{\ell} > sup_{x\in\tilde{C}} V(x)$ *em que* $\tilde{C} = \{x \in \Omega_{\tilde{L}} : \nabla V(x).f_p(x) > 0, \forall p \in \mathcal{P}\}$. *Se* $x_0 \in \Omega_{\tilde{L}}$, *então a solução chaveada* $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ *é atraída para o maior conjunto fracamente invariante em* $\tilde{E} = \{x \in \Omega_{\tilde{L}} : \nabla V(x).f_p(x) = 0, \forall p \in \mathcal{P}\} \cup \Omega_{\tilde{\ell}}$.

Demonstração. A demonstração desse resultado é análoga a demonstração do Teorema 1. □

Para ilustrarmos os resultados acima, em seguida apresentamos um exemplo numérico.

Exemplo 3.1. *Considere o sistema chaveado* (1) *composto pelos seguintes subsistemas:*

$$f_1(x,y) = \left[\begin{array}{c} -3x + 4x^2 - 0.5xy - x^3 \\ -2.1y + xy \end{array} \right], f_2(x,y) = \left[\begin{array}{c} -2.1x + 2.8x^2 - 0.35xy - 0.7x^3 \\ -1.68y + 0.8xy \end{array} \right]. \quad (6)$$

Note que, considerando $x = 0$ implica que $f_{11}(0,y) \geq 0$ e $f_{21}(0,y) \geq 0$, e $y = 0$ implica que $f_{12}(x,0) \geq 0$ e $f_{22}(x,0) \geq 0$, ou seja, os subsistemas são positivos, com f_{ij} representando a linha j do campo vetorial f_i. Escolhendo

$$\begin{aligned} V(x,y) &= 18.93(x-2.1)^4 - 36.34(x-2.1)^3(y-1.98) - 31.73(x-2.1)^3 \\ &+ 113.7(x-2.1)^2(y-1.98)^2 + 400(x-2.1)^2(y-1.98) + 270.2(x-2.1)^2 \\ &+ 83.09(x-2.1)(y-1.98)^2 + 72.7(x-2.1)(y-1.98) - 0.09347(x-2.1) \\ &+ 63.89(y-1.98)^3 + 138.5(y-1.98)^2 + 8.6(y-1.98), \end{aligned} \quad (7)$$

verificamos numericamente que o conjunto onde a derivada dessa função ao longo da solução dos subsistemas (pontos vermelhos e azuis) é limitado no $\mathbb{R}^2_+$, como pode ser visto na Figura 1. Escolhendo $\ell = 362.9$ e devido ao fato de que $E \subset \Omega_\ell$, temos pelo Teorema 3.1 que toda solução limitada $\varphi(t, x_0)$ com $x_0 \in \mathbb{R}^2_+$ é atraída para um conjunto fracamente invariante em $\Omega_{362.9}$. Pelo Corolário 3.1, ainda podemos concluir que para todo $x_0 \in \Omega_{45}$, a solução será atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_7 já que os pontos onde a derivada de V ao longo dos subsistemas é maior que zero estão no interior de Ω_7 (veja Figura 1).

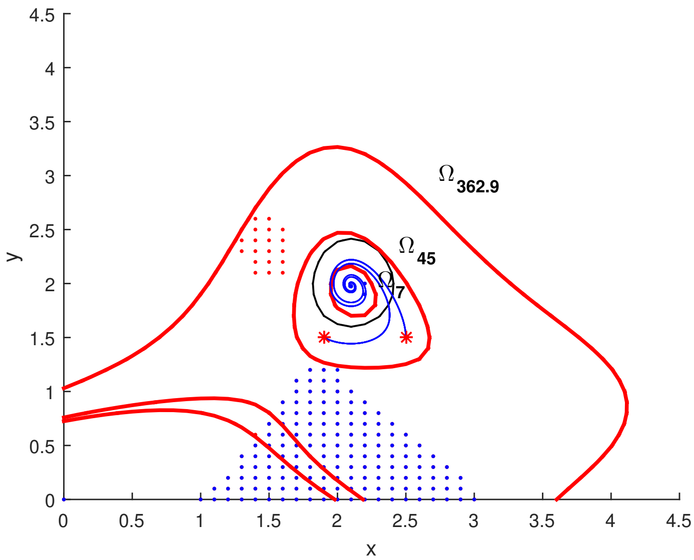

Figura 1: Soluções chaveadas com condições iniciais $(2.5, 1.5)$ e $(1.9, 1.5)$.

Observação 3.1. *(i) A função V considerada no Exemplo 3.1, foi encontrada através de um procedimento numérico. Esse procedimento foi desenvolvido em [4] e utiliza programação em soma de quadrado para encontrar uma função polinomial com base nas regras da extensão do princípio de invariância.*
(ii) A função V utilizada no Exemplo 1, não poderia ser utilizada na extensão do princípio de

invariância apresentada em [7], pois o conjunto onde a derivada de V *ao longo da solução dos subsistemas assume valor positivo não é limitado em* $\mathbb{R}^2$*.*
(iii) A curva preta apresentada na Figura 1, representa uma curva de nível da função $V(x,y) = \frac{x}{2.1} - log\left(\frac{x}{2.1}\right) + \frac{0.5*1.98}{2.1}\left(\frac{y}{1.98} - log\left(\frac{y}{1.98}\right)\right) - \left(1+\frac{0.5*1.98}{2.1}\right)$*, a qual é uma função de Lyapunov apresentada em [2] para o subsistema 1. Assim, se pensarmos na análise somente do subsistema 1, uma vez que* Ω_7 *é um subconjunto da curva de nível da função de Lyapunov (curva preta), podemos afirmar que a solução com* $x_0 \in \Omega_{42}$ *é atraída para o ponto de equilíbrio* $(2.1, 1.98)$*. Dessa forma, melhoramos a área de atração antes obtida em [2].*

4 Considerações Finais

Apresentamos a extensão do princípio de invariância para a classe de sistemas positivos chaveados. Com esse resultado somos capazes de analisar sistemas através de uma função auxiliar V, a qual desempenha o mesmo papel que a função de Lyapunov, no entanto ela não precisa ser positiva e sua derivada ao longo da solução chaveada pode assumir valores positivos em conjunto ilimitados do $\mathbb{R}^n$, o que não era permitido em resultados apresentados anteriormente. Apresentamos ainda, um exemplo numérico para mostrar a efetividade do teorema apresentado. Nele, mostramos numericamente que o conjunto onde a derivada da função V considerada é ilimitado no $\mathbb{R}^n$ e mesmo assim mostramos uma estimativa do atrator e área de atração. Ainda, comparando com análises anteriores para o sistema sem o chaveamento, mostramos que melhoramos a estimativa da área de atração. Em trabalhos futuros, podemos ainda apresentar o resultado para sistemas positivos chaveados com parâmetros incertos e ainda um resultado que analisa a classe de sistemas através de várias funções do tipo Lyapunov V_p ao invés de uma função comum V para todos os subsistemas.

Agradecimentos

Agradecemos a UTFPR-CP pelo apoio financeiro.

Referências

[1] A. Bacciotti e L. Mazzi. "An invariance principle for nonlinear switched systems". Em: **Systems Control Letters** 54.11 (2005), pp. 1109–1119. ISSN: 0167-6911. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2005.04.003`. URL: `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167691105000642`.

[2] M. Gatto e S. Rinaldi. "Stability analysis of predator-prey models via the liapunov method". Em: **Bulletin of Mathematical Biology** 39.3 (1977), pp. 339–347. ISSN: 0092-8240. DOI: `https://doi.org/10.1016/S0092-8240(77)80071-2`. URL: `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0092824077800712`.

[3] A.V. Platonov. "Analysis of the dynamical behavior of solutions for a class of hybrid generalized Lotka–Volterra models". Em: **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation** 119 (2023), p. 107068. ISSN: 1007-5704. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.107068`.

[4] Y. C. S. Ribeiro. "Estimativa da região de estabilidade via Funções de Energia Generalizadas". Tese de doutorado. São Carlos, SP: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2017.

[5] C. Shuji et al. "Application of switched system theory in power system stability". Em: **2014 49th International Universities Power Engineering Conference (UPEC)**. 2014, pp. 1–6. DOI: 10.1109/UPEC.2014.6934651.

[6] M. C. Valentino et al. "Ultimate boundedness sufficient conditions for nonlinear systems using TS fuzzy modelling". Em: **Fuzzy Sets And Systems** (2018), pp. 1–13. DOI: https://doi.org/10.1016/j.fss.2018.03.010.

[7] Michele C. Valentino et al. "An extension of the invariance principle for dwell-time switched nonlinear systems". Em: **Systems Control Letters** 61.4 (2012), pp. 580–586. ISSN: 0167-6911. DOI: https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2012.02.007. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167691112000448.

[8] M. Xue et al. "Stability of multi-dimensional switched systems with an application to open multi-agent systems". Em: **Automatica** 146 (2022), p. 110644. ISSN: 0005-1098. DOI: https://doi.org/10.1016/j.automatica.2022.110644. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109822005088.

