

Controle do *Aedes Aegypti* com a Técnica Wolbachia e Armadilhas Impulsivas via Transformação Integral Generalizada

Maiquison S. Friguis¹

Instituto Federal Fluminense, Cabo Frio, RJ

Izabela S. L. Friguis²

Instituto Federal Fluminense, Macaé, RJ

Resumo. Desequilíbrio ambiental pode provocar a explosão demográfica de diversas espécies, especialmente vetores de doenças, como é o caso do *Aedes Aegypti*. Esse mosquito é responsável por propagar doenças como Dengue, Zika Vírus e Chikungunya, além de se reproduzir com facilidade em regiões próximas ao ser humano. Neste trabalho apresenta-se uma combinação entre a técnica Wolbachia, que infecta a população de mosquitos selvagens com uma bactéria que torna as novas gerações incapazes de transmitir os vírus e uma técnica considerando o uso de armadilhas impulsivas colocadas em pontos discretos do domínio espacial. Para estudar a dinâmica populacional, foi utilizado um sistema do tipo presa-predador difusivo-reativo modelado por um sistema de equações diferenciais parciais. A solução do sistema foi obtida utilizando a técnica de Transformada Integral Generalizada. Os resultados encontrados indicam que a abordagem integrada podem ter uma boa eficácia no controle populacional.

Palavras-chave. Presa-Predador, Dinâmica Populacional, Wolbachia, Armadilhas Impulsivas, Transformada Integral Generalizada.

1 Introdução

O *Aedes Aegypti* é um mosquito que se destaca como um importante vetor de doenças em todo o mundo. O desequilíbrio ambiental tem sido apontado como um dos principais fatores responsáveis pela explosão populacional desse mosquito em áreas urbanas. A urbanização desordenada, a falta de saneamento básico e a acumulação de lixo são alguns dos fatores que favorecem a proliferação desse tipo de população [1].

Diante desse cenário, a utilização de soluções biotecnológicas tem sido considerada uma alternativa eficaz para o controle do mosquito. A Wolbachia, uma bactéria intracelular presente em muitas espécies de insetos, tem se mostrado uma solução promissora para o controle do *Aedes Aegypti*, pois quando presente neste mosquito impede que arbovírus se desenvolvam [6]. A introdução de mosquitos com Wolbachia em áreas urbanas tem sido capaz de reduzir significativamente a população do *Aedes aegypti* selvagens e, conseqüentemente, o risco de transmissão de doenças [3]. Outra forma de controle que vem apresentando bons resultados é o uso de armadilhas impulsivas [8].

Neste trabalho, apresenta-se um modelo para investigar a dinâmica de uma população de mosquitos selvagens e um poluição de mosquitos infectados com Wolbachia na presença de locais de

¹maiquison.friguis@ifff.edu.br

²bellasleal@gmail.com

abate. O problema é formulado com um modelo presa-predador [7] acoplando algumas armadilhas impulsivas em alguns pontos discretos do domínio [10].

Nesse contexto, a população de mosquitos selvagens pode ser considerada como a presa, enquanto a população de mosquitos infectados com Wolbachia pode ser vista como o predador. A introdução de mosquitos com Wolbachia pode levar a uma redução significativa nos casos, uma vez que a bactéria impede a reprodução do arbovírus no mosquito selvagem, reduzindo assim a sua capacidade de transmitir a doença [5], porém a presença da armadilhas pode afetar ambas populações e seus efeitos precisam ser analisados em conjunto.

A dinâmica populacional de um sistema presa-predador como o descrito anteriormente tem uma análise mais fiel do fenômeno quando considera-se sua versão Espaço-Temporal, uma vez que populações de mosquitos tendem a espalhar-se considerando o tempo e a posição [4]. Nesse sentido, este trabalho tem como objetivo apresentar a solução de um sistema do tipo presa-predador difusivo-reativo que descreve a dinâmica entre uma população de mosquitos selvagens e uma população de mosquitos infectados com Wolbachia considerando a presença de algumas armadilhas impulsivas, propondo como método de solução a Técnica de Transformada Integral Generalizada (GITT) [2].

2 Formulação do Modelo

Considere uma população de mosquitos selvagens u e uma população de mosquitos infectados com Wolbachia v , em um domínio espacial $[0, L]$ ambas afetadas por N_{CS} armadilhas impulsivas e dispersão governada pela lei de Fick. Considere ainda, que natalidade, mortalidade, competição e abate por armadilhas são dados por funções $F(u, v)$ e $G(u, v)$. O sistema de equações diferenciais parciais que descreve o problema é dado por [4, 10]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \nabla^2 u + F(u, v), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{1a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \nabla^2 v + G(u, v), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{1b}$$

onde D_u e D_v são os coeficientes de difusão das populações de mosquitos selvagens e mosquitos infectados com Wolbachia, respectivamente. Nesse trabalho, as condições de contorno e iniciais são dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(L, t) = 0 \tag{2a}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{e} \quad v(x, 0) = v_0(x) \tag{2b}$$

e as funções $F(u, v)$ e $G(u, v)$ são descritas por:

$$F(u, v) = R_0 u \left(1 - S_h \frac{v}{u + v} \right) \left(1 - \frac{u + v}{K} \right) - d_1 u - \sum_{i=1}^{N_{cs}} B_j u(x_j, t) \delta(x - x_j) \tag{3a}$$

$$G(u, v) = S_0 v \left(1 - \frac{u + v}{K} \right) - d_2 v - \sum_{i=1}^{N_{cs}} B_j v(x_j, t) \delta(x - x_j) \tag{3b}$$

onde R_0 e S_0 , são as taxas de natalidade intrínsecas, S_h é a incompatibilidade citoplasmática, K é a capacidade de suporte ambiental, d_1 e d_2 são as taxas de mortalidade natural dessas populações e x_j é a posição de cada armadilha impulsiva com intensidade constante B_j com impulsividade dada uma "função" Delta de Dirac δ .

Seguindo o formalismo da GITT [2], definimos os pares de transformadas integrais em termos de uma expansão de autofunção:

$$\text{Transformada : } \bar{u}_i(t) = \int_0^L \tilde{\psi}_i(x)u(x,t)dx \tag{4}$$

$$\text{Inversa : } u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(x)\bar{u}_i(t)$$

para a população de mosquitos selvagens.

$$\text{Transformada : } \bar{v}_i(t) = \int_0^L \tilde{\phi}_i(x)v(x,t)dx \tag{5}$$

$$\text{Inversa : } v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\phi}_i(x)\bar{v}_i(t)$$

para a população de mosquitos infectados com Wolbachia.

Com $\tilde{\psi}_i(x)$ e $\tilde{\phi}_i(x)$ sendo autofunções, normalizadas, obtidas a partir da solução do problema de autovalores auxiliares, formulados pela aplicação direta da separação de variáveis à versão linear homogênea puramente difusiva do problema (1), genericamente dado por:

$$D \frac{d^2\chi_i}{dx^2} + \beta_i^2\chi_i = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d\chi_i}{dx}(0) = \frac{d\chi_i}{dx}(L) = 0 \tag{6}$$

onde χ_i é autofunção associada a cada população ($\tilde{\psi}_i(x)$ ou $\tilde{\phi}_i(x)$) com auto valor β_i e D é o coeficiente de difusão da população envolvida.

A Transformação Integral do problema principal é obtida utilizando os operadores:

$$\int_0^L \tilde{\psi}_i(x) (\cdot) dx \quad \text{e} \quad \int_0^L \tilde{\phi}_i(x) (\cdot) dx \tag{7}$$

que aliados aos pares de transformação, as condições de contorno, a segunda fórmula de Green e a ortogonalidade das autofunções transformam o problema original em:

$$\frac{d\bar{u}_i(t)}{dt} + \lambda_i^2\bar{u}_i(t) = \bar{F}_i(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \quad \text{e} \quad \frac{d\bar{v}_i(t)}{dt} + \omega_i^2\bar{v}_i(t) = \bar{G}_i(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \tag{8}$$

onde λ_i e ω_i são autovalores de $\tilde{\psi}_i(x, y)$ e $\tilde{\phi}_i(x, y)$, respectivamente e:

$$\bar{\mathbf{u}} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_N\} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{v}} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_N\} \tag{9}$$

com os termos fonte transformados dados por:

$$\bar{F}_i(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = \bar{F}_{i,1}(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \cdot \bar{F}_{i,2}(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \cdot \bar{F}_{i,3}(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) + \bar{F}_{i,4}(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) + \bar{F}_{i,5}(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \tag{10a}$$

$$\bar{G}_i(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = \bar{G}_{i,1}(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \cdot \bar{G}_{i,2}(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) + \bar{G}_{i,3}(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) + \bar{G}_{i,4}(t, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \tag{10b}$$

com:

$$\bar{F}_{i,1} = \int_0^L \tilde{\psi}_i(x)R_0 \sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t)\tilde{\psi}_j(x)dx \tag{11a}$$

$$\bar{F}_{i,2} = \int_0^L \tilde{\psi}_i(x) \left(1 - S_h \frac{\sum_{j=1}^N \bar{v}_j(t) \tilde{\phi}_j(x)}{\sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t) \tilde{\psi}_j(x) + \sum_{j=1}^N \bar{v}_j(t) \tilde{\phi}_j(x)} \right) dx \quad (11b)$$

$$\bar{F}_{i,3} = \int_0^L \tilde{\psi}_i(x) \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t) \tilde{\psi}_j(x) + \sum_{j=1}^N \bar{v}_j(t) \tilde{\phi}_j(x)}{K} \right) dx \quad (11c)$$

$$\bar{F}_{i,4} = - \int_0^L \tilde{\psi}_i(x) d_1 \sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t) \tilde{\psi}_j(x) dx \quad (11d)$$

$$\bar{F}_{i,5} = - \int_0^L \tilde{\psi}_i(x) \sum_{k=1}^{N_{cs}} B_k \left(\sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t) \tilde{\psi}_j(x_k) \right) \delta(x - x_k) dx \quad (11e)$$

$$\bar{G}_{i,1} = \int_0^L \tilde{\psi}_i(x) S_0 \sum_{j=1}^N \bar{v}_j(t) \tilde{\phi}_j(x) dx \quad (11f)$$

$$\bar{G}_{i,2} = \int_0^L \tilde{\psi}_i(x) \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t) \tilde{\psi}_j(x) + \sum_{j=1}^N \bar{v}_j(t) \tilde{\phi}_j(x)}{K} \right) dx \quad (11g)$$

$$\bar{G}_{i,3} = - \int_0^L \tilde{\phi}_i(x) d_2 \sum_{j=1}^N \bar{v}_j(t) \tilde{\phi}_j(x) dx \quad (11h)$$

$$\bar{G}_{i,4} = - \int_0^L \tilde{\phi}_i(x) \sum_{k=1}^{N_{cs}} B_k \left(\sum_{j=1}^N \bar{v}_j(t) \tilde{\phi}_j(x_k) \right) \delta(x - x_k) dx \quad (11i)$$

Com condições iniciais transformadas dadas por:

$$\bar{u}_i(t) = \int_0^L \tilde{\psi}_i(x) u_0(x) dx \quad \text{e} \quad \bar{v}_i(t) = \int_0^L \tilde{\phi}_i(x) v_0(x) dx \quad (12)$$

O sistema acima, formado pelas Equações (11a-12), fica acoplado e para fins computacionais o sistema de EDO's pode ser truncado em uma ordem suficientemente grande, para a precisão requerida, e numericamente resolvido para os potenciais transformados $\bar{u}_i(t)$, $i = 1, \dots, N$.

O cálculo das funções expressas na Equações (11a-12) exige a solução de integrais envolvendo as autofunções. Em algumas situações, estas podem ser avaliadas analiticamente e em outras a utilização de algum método numérico pode ser a única alternativa. Considerando a natureza oscilatória das autofunções presentes nesse trabalho optou-se por um método de integração semi-analítica [9].

3 Resultados e Discussões

Inspirado nos resultados apresentados em [4] e [10] utilizou-se os seguintes parâmetros para solução do problema proposto:

Tabela 1: Parâmetros utilizados para solução do problema

D_u	D_v	R_0	S_0	K	S_h	d_1	d_2	B	u_0	v_0
0,01	0,01	0,8	0,6	1	1	0,27	0,3	0,1	1	1

com quatro locais de abate impulsivo de intensidade constante B posicionadas em $x = 0, 2, x = 0, 4, x = 0, 6$ e $x = 0, 8$.

Tabela 2: Convergência da solução com armadilhas

N	$u(x, t = 5)$			$v(x, t = 5)$		
	$x = 0, 2$	$x = 0, 4$	$x = 0, 5$	$x = 0, 2$	$x = 0, 4$	$x = 0, 5$
10	0,103520	0,0789017	0,076321	0,128256	0,104758	0,103168
30	0,093547	0,0702012	0,081500	0,115878	0,093534	0,109790
50	0,092066	0,0690124	0,081817	0,113582	0,091527	0,110652
70	0,091477	0,0685523	0,081899	0,112961	0,091025	0,110868
90	0,091151	0,0683028	0,081932	0,112562	0,090697	0,110911

Para investigar a solução do problema proposto, por meio da GITT foi analisada a convergência da densidade de mosquitos selvagens e de mosquitos infectados com Wolbachia à medida que a ordem de truncamento do sistema de EDO's (N) é aumentada, de modo a satisfazer a meta de precisão de pelo menos duas casas decimais em cada posição de medição, é importante destacar que na metodologia proposta para integração, nesse trabalho, um parâmetro de controle é o número de Sub-Regiões de integração aqui fixadas como $M = 30$. Nesse sentido, a Tabela 2 mostra o comportamento de convergência da solução considerando a presença de 4 locais de abate impulsivo com intensidade B , variando o truncamento N e mantendo o número de sub-regiões de integração semi-analítica fixado. Deve-se observar que a maioria dos resultados apresentados convergem para pelo menos três algarismos significativos, e também pode-se notar que com $N = 30$ a solução já está aparentemente convergida para o segundo dígito significativo, ilustrando o bom comportamento de convergência da solução.

Tabela 3: Convergência da solução sem armadilhas

N	$u(x, t = 5)$			$v(x, t = 5)$		
	$x = 0, 2$	$x = 0, 4$	$x = 0, 5$	$x = 0, 2$	$x = 0, 4$	$x = 0, 5$
10	0,310412	0,310412	0,310412	0,285089	0,285089	0,285089
30	0,310412	0,310412	0,310412	0,285089	0,285089	0,285089
50	0,311117	0,311117	0,309707	0,285453	0,285453	0,284724
70	0,310942	0,310942	0,309532	0,285362	0,285362	0,284634
90	0,310942	0,310942	0,309532	0,285362	0,285362	0,284634

Na Tabela 3 pode-se visualizar o comportamento da convergência em relação a N , percebe-se, que neste caso, a convergência é atingida com uma expansão com menos autofunções do que no caso anterior e com $N = 70$ já obteve-se uma solução completamente convergida quando comparada com a solução com $N = 90$.

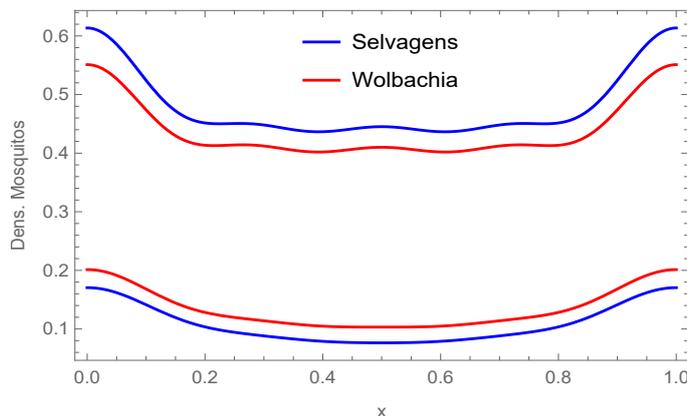


Figura 1: Perfil de densidade de mosquitos.

Por uma questão de ilustração, na Figura 1 pode-se observar o perfil da densidade populacional de mosquitos selvagens e de infectados com Wolbachia em $t = 1$ (mais acima) e em $t = 5$ (inferior), observa-se que inicialmente a população de Wolbachia apresenta uma densidade menor que a densidade de mosquitos selvagens, muito possivelmente por ter uma taxa de natalidade menor e uma taxa de mortalidade maior, porém a medida que a solução caminha para seu estado permanente a população de mosquitos selvagens tende a diminuir em relação a de mosquitos infectados.

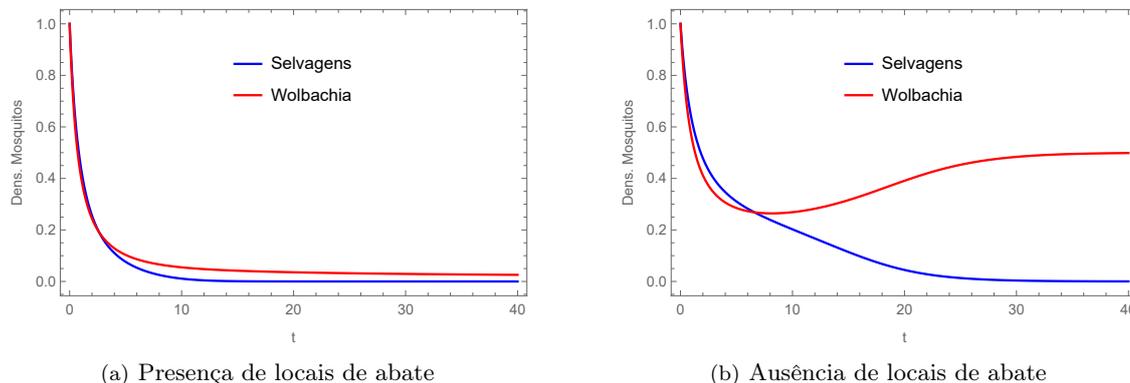


Figura 2: Comportamento transiente da densidade de mosquitos selvagens e mosquitos com Wolbachia

Na Figura 2 pode-se observar o comportamento transiente da solução em $x = 0,5$ onde nota-se (Figura 2a) que ambas populações caminham para extinção quando temos a presença de armadilhas, enquanto (Figura 2b) mostra que a população com Wolbachia é suficiente para controlar a população de mosquitos selvagens sem a presença de armadilhas, porém necessita de um tempo maior.

4 Considerações Finais

O mosquito *Aedes aegypti* ficou mundialmente conhecido como um vetor da dengue, porém hoje sabe-se que ele tem alta capacidade de transmitir diversas doenças, as chamadas arboviroses,

e seu controle populacional representa um grande desafio para redução dessas enfermidades em todo o mundo. Uma das abordagens mais promissoras para o controle dessa doença é a utilização da bactéria *Wolbachia*, que infecta os mosquitos e reduz sua capacidade de transmitir arbovírus para humanos. Por outro lado, técnicas utilizando armadilhas, principalmente as do tipo impulsivo, ainda são uma opção viável quando a intenção é a redução de uma população de mosquitos selvagens e, conseqüentemente, a transmissão arbovirose.

Neste trabalho considerou-se o acoplamento de armadilhas impulsivas a um modelo de competição interespecífica. O modelo matemático tipo presa-predador utilizado permitiu simular diferentes cenários e avaliar a eficácia das diferentes técnicas isoladas e combinadas no controle do mosquito. Por conta do sistema reativo difusivo proposta para modelar o problema a técnica de Transformada Integral Generalizada mostrou-se adequada para encontrar uma solução acurada para as densidades das duas populações envolvidas.

Os resultados deste estudo indicam que a combinação das duas técnicas - *Wolbachia* e armadilhas impulsivas - é eficaz reduzindo ambas populações a níveis de extinção resultado dessa forma na diminuição no número de infecções. Esses resultados são promissores para o desenvolvimento de novas estratégias de controle para a dengue e outras doenças transmitidas por mosquitos. A abordagem integrada proposta neste estudo pode ser adaptada para diferentes regiões geográficas e pode ser combinada com outras técnicas de controle de mosquitos para obter resultados ainda mais eficazes.

Futuramente, pretende-se expandir a aplicação desse modelo para um domínio espacial 2D, analisar a sensibilidade dos parâmetros, assim como fazer a estimativa desses via problemas inversos.

Referências

- [1] M. S. Carvalho et al. “*Aedes aegypti* control in urban areas: A systemic approach to a complex dynamic”. Em: **PLoS neglected tropical diseases** 11.7 (2017), pp. 1–15.
- [2] R. M. Cotta. **Integral transforms in computational heat and fluid flow**. CRC Press, 1993.
- [3] H. A Flores e S. L. O’Neill. “Controlling vector-borne diseases by releasing modified mosquitoes”. Em: **Nature Reviews Microbiology** 16.8 (2018), pp. 508–518.
- [4] Y. Li, Y. Wang e L. Liu. “Optimal control of dengue vector based on a reaction–diffusion model”. Em: **Mathematics and Computers in Simulation** 203 (2023), pp. 250–270.
- [5] B. Michael, R.T. Colin e H. John. “Ecology: from individuals to ecosystems”. Em: **Michael Begon, Colin** (2006).
- [6] S. L. O’Neill. “The use of *Wolbachia* by the World Mosquito Program to interrupt transmission of *Aedes aegypti* transmitted viruses”. Em: **Dengue and Zika: control and antiviral treatment strategies** (2018), pp. 355–360.
- [7] T. N. Pereira et al. “*Wolbachia* significantly impacts the vector competence of *Aedes aegypti* for Mayaro virus”. Em: **Scientific reports** 8.1 (2018), pp. 1–9.
- [8] R.R.L Simons e S. A. Gourley. “Extinction criteria in stage-structured population models with impulsive culling”. Em: **SIAM Journal on Applied Mathematics** 66.6 (2006), pp. 1853–1870.
- [9] L. A. Sphaier et al. “The UNIT algorithm for solving one-dimensional convection-diffusion problems via integral transforms”. Em: **International Communications in Heat and Mass Transfer** 38.5 (2011), pp. 565–571.
- [10] R. E. White. “Populations with impulsive culling: control and identification”. Em: **International Journal of Computer Mathematics** 86.12 (2009), pp. 2143–2164.