

Dinâmica da função zeta de Artin-Mazur associada à inversões geométricas

Arlane Manoel Silva Vieira¹

Centro de Ciências de Codó, UFMA, Codó, MA

Kenio Alexsom de Almeida Silva²

Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, UFMA, São Luis, MA

Raibel de Jesus Arias Cantillo³

Centro de Ciências de Balsas, UFMA, Balsas, MA

Resumo. A dinâmica topológica de inversões geométricas para uma configuração disjunta dos círculos de inversão foi estudada em [6]. Verificou-se que, para cada inteiro $k \geq 1$, o número N_k de órbitas periódicas de período k é uma função apenas do número de círculos do sistema dinâmico. Neste artigo analisamos o comportamento das órbitas críticas da função zeta de Artin-Mazur ζ_f associada à sequência (N_k) e descrevemos as componentes do conjunto de Fatou de ζ_f . Além disso, concluímos que, em alguns casos, o conjunto de Julia é um quasecírculo.

Palavras-chave. órbitas periódicas, conjunto de Julia, quasecírculos, funções racionais.

1 Introdução

Sejam $p \geq 1$ um número inteiro fixado e D_1, \dots, D_p discos fechados no plano complexo dois a dois disjuntos. Para cada $1 \leq j \leq p$, seja Γ_j a fronteira geométrica do disco D_j . A *inversão geométrica* em um disco é a transformação geométrica análoga à reflexão em uma reta no plano. Algebricamente, se I_Γ é a inversão geométrica no círculo (circunferência) $\Gamma := \partial D_r(z_0)$ então

$$I_\Gamma(z) = z_0 + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} \quad (1)$$

A principal referência para o estudo de inversões geométricas é [4, p. 96], que os autores chamam de **Dança de Schottky**, em tradução livre. Denotaremos por I_j a inversão geométrica em $\Gamma_j := \partial D_j$, para cada $1 \leq j \leq p$. As aplicações I_1, \dots, I_p induzem um sistema dinâmico natural em $X_p := \cup_{j=1}^p D_j$. Note que X_p é um espaço métrico compacto e desconexo, relativamente à distância euclidiana.

Uma *órbita* em X_p é uma sequência $(x_n) \in X_p^{\mathbb{N}}$ tal que $x_{j+1} = I_k(x_j)$ para algum $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ com $k \neq j$. Assim, o espaço métrico compacto de todas as órbitas em X_p (com a métrica produto) será denotado por $O(X_p)$.

O *conjunto limite* de uma órbita (x_n) denotado por $\omega(x_n)$, é o conjunto de todos os pontos de acumulação desta sequência em X_p . Quando duas órbitas possuem o mesmo conjunto limite dizemos que elas são equivalentes. Essa relação define uma relação de equivalência no espaço das órbitas. O espaço quociente $O(X_p)/\sim$, com a topologia quociente, é um espaço métrico

¹arlane.silva@ufma.br

²kenio.silva@ufma.br

³raibel.jac@ufma.br

compacto segundo Vieira *et al* [5]. A dinâmica induzida no espaço quociente $O(X_p)/\sim$ é definida naturalmente por uma transformação contínua f dada por

$$f([x_n]) = [x_{n+1}],$$

onde $[x_n]$ é a classe da órbita (x_n) . De acordo com Vieira *et al* [6], o número de órbitas periódicas de f de período $k \geq 1$ é igual a

$$N_k = p^k + (-1)^k p,$$

para todo $p \geq 1$. Neste artigo classificaremos as componentes de Fatou da função zeta de Artin-Mazur associada à sequência $(N_k)_k$.

2 Função Zeta de Artin-Mazur

Em [1], Artin e Mazur introduziram sua função zeta para estudar a taxa de crescimento do número de pontos periódicos de um sistema dinâmico em função do período. No caso da função f que estamos considerando, fixado $p \geq 1$ inteiro, N_k cresce no máximo exponencialmente, uma vez que

$$N_k \leq c^k,$$

para todo $k \geq 1$, onde $c = 2p$. Isto ocorre em geral para um conjunto denso de funções de classe C^k na esfera de Riemann, na topologia C^k , como foi demonstrado em [1].

Formalmente, a função Zeta de Artin-Mazur associada à quantidade de órbitas periódicas de f , ou seja, à sequência $(N_k)_k$, é definida por

$$\zeta(z) := \zeta_f(z) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} N_k \right).$$

Pode-se verificar que

$$\zeta(z) = \frac{1}{(1-pz)(1+z)^p},$$

ou seja, ζ é uma função racional na esfera de Riemann. Usando a mudança de coordenadas conforme

$$\phi(z) = \frac{1}{z},$$

a função ζ é conformemente equivalente à função racional, com parâmetro p , definida por

$$f_p(z) = \frac{(z-p)(z+1)^p}{z^{p+1}}, \tag{2}$$

onde o grau de f_p é $p+1$. É importante observar que f_p e ζ_f são conformemente conjugadas por uma transformação de Möbius, e portanto, possuem a mesma dinâmica.

Segue-se de (2) que f_p tem um único polo na origem de ordem $p+1$, e dois zeros em p e -1 de ordem 1 e p , respectivamente. Esses pontos especiais têm papel fundamental na estrutura geométrica do espaço de fase, que depende do parâmetro p .

Neste contexto, o espaço de fase natural é a esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e pode ser, dinamicamente, decomposto em dois subconjuntos completamente invariantes, a saber o conjunto de Fatou, \mathcal{F}_p e o conjunto de Julia \mathcal{J}_p , de f_p . Por definição, \mathcal{F}_p é a coleção dos pontos de $\widehat{\mathbb{C}}$ nos quais a família $(f_p^n)_n$ é *normal* no sentido de Montel, enquanto que \mathcal{J}_p é o complementar do conjunto de Fatou na esfera de Riemann (veja mais em [3], por exemplo). Neste artigo vamos explorar os casos $p = 1, 2, 3$.

3 Resultados

3.1 O caso $p = 1$

Substituindo-se $p = 1$ em (2) obtemos a função

$$f_1(z) = 1 - \frac{1}{z^2}.$$

Neste caso, os dois zeros da função coincidem e f_1 tem uma única órbita superatratora $\{0, 1, \infty\}$. Em particular, o conjunto de Fatou de f_1 coincide com a bacia de atração da órbita crítica (veja a figura 1).

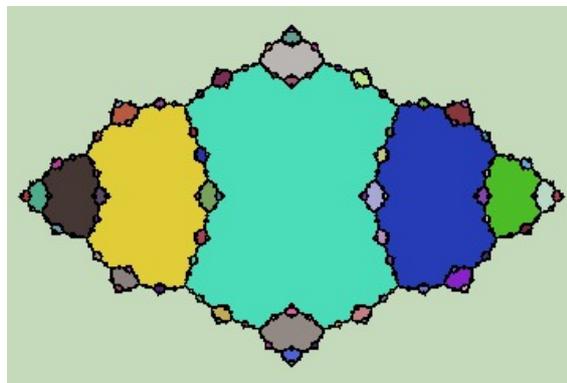


Figura 1: As regiões coloridas são as componentes de Fatou de f_1 .

Este é um exemplo de uma função *hiperbólica* no conjunto de Julia, no sentido de que existe uma métrica $\sigma(z)|dz|$ diferenciavelmente equivalente à métrica esférica em uma vizinhança de \mathcal{J}_1 (veja [2, p. 89] para mais detalhes). Em particular, como ∞ está no conjunto de Fatou de f_1 , existe $m \geq 1$ tal que f_1^m é expansora em \mathcal{J}_1 . Ainda neste caso, cada componente de Fatou é conformemente isomorfa a um disco, enquanto que o conjunto de Julia é conexo e localmente conexo.

3.2 O caso $p \geq 2$

Suponhamos agora que $p \geq 2$. Com um cálculo direto, usando (2), obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.1. *Os pontos críticos da função f_p em $\widehat{\mathbb{C}}$ são -1 (com multiplicidade $p-1$), 0 (com multiplicidade p) e ∞ (com multiplicidade 1).*

A figura 2 mostra que todos os pontos críticos de f_p estão em uma mesma órbita. Mostraremos a seguir, que a órbita crítica pertence à bacia de atração de um ciclo de período 2 nos casos $p = 2$ e $p = 3$.

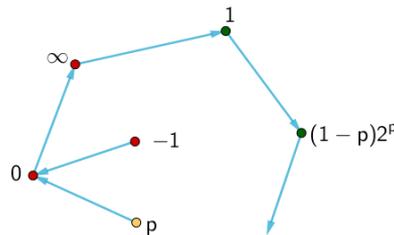


Figura 2: Órbita crítica

Observe que $f_2(z) = \frac{(z-2)(z+1)^2}{z^3}$, de onde segue-se que

$$f_2^2(z) = \frac{(2+3z-2z^3)^2(2+3z+z^3)}{(z-2)^3(1+z)^6}.$$

Pode-se verificar que o número real

$$z_* = -\frac{1}{2} \left(3 + \sqrt{2} - \sqrt{19 + 14\sqrt{2}} \right)$$

é um ponto periódico de período 2 de f_2 e $f_2(z_*) \neq z_*$, já que f_2 não possui ponto fixo real. Além disso,

$$(f_2^2)'(z) = \frac{36z^5(2z^3 - 3z - 2)}{(z-2)^4(1+z)^7},$$

de onde concluímos que

$$(f_2^2)'(z_*) = 9 - \frac{27}{2\sqrt{2}} \approx -0.5459.$$

Isto prova que z_* é um ponto periódico geometricamente atrator, e portanto, sua bacia de atração contém a órbita de todos os pontos críticos de f_2 . Em particular, f_2 é hiperbólica em \mathcal{J}_2 [2, p 90].

Teorema 3.1. *O conjunto de Fatou de f_2 contém um único ciclo periódico, geometricamente atrator.*

De fato, uma vez que descrevemos o comportamento dinâmico das órbitas críticas, a conclusão do Teorema 3.1 segue do Teorema de Classificação [2, p. 74].

Observando-se que f_2 é hiperbólica e possui apenas duas componentes de Fatou completamente invariantes, segue-se do Teorema de Sullivan [2, p. 102] o seguinte resultado.

Corolário 3.1. *O conjunto de Julia de f_2 é um quasecírculo.*

Com a mesma estratégia aplicada ao caso $p = 3$ obtemos resultados semelhantes.

Teorema 3.2. *O conjunto de Fatou de f_3 contém um único ciclo periódico, geometricamente atrator. Além disso, \mathcal{J}_3 é um quasecírculo.*

De fato, a equação $f_3^2(z) = z$ tem uma raiz real $\xi \approx 0.9807$, tal que $(f_3^2)'(\xi) \approx -0.1130$ e portanto, ξ é um ponto periódico geometricamente atrator.

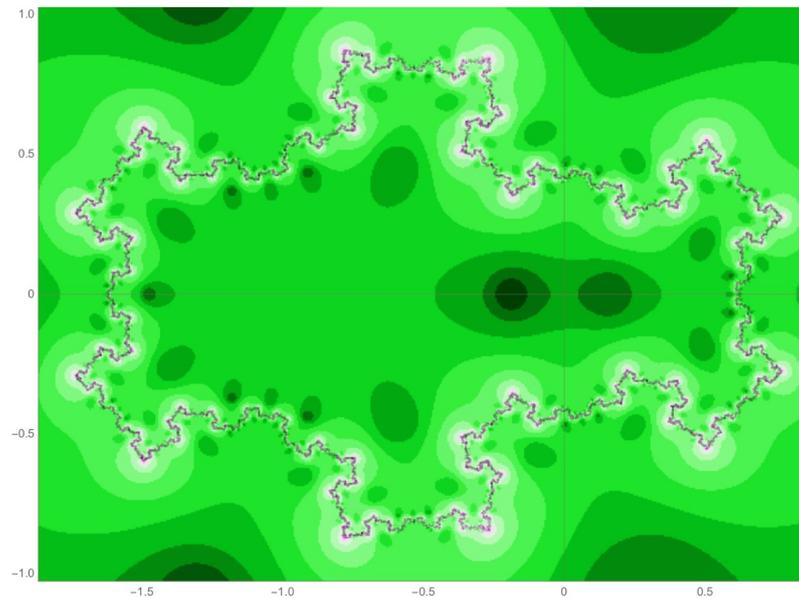


Figura 3: A curva indicada é o conjunto de Julia de f_3 .

4 Considerações Finais

Neste trabalho classificamos a dinâmica complexa da função zeta de Artin-Mazur associada à transformação natural f_p no espaço quociente de órbitas para as inversões geométricas estudadas em [6]. No caso $p = 1$ cada componente de Fatou é conformemente isomorfa a um disco, enquanto que o conjunto de Julia é conexo e localmente conexo (veja a figura 1). Já nos casos $p \geq 2$ a função f_p tem ponto crítico em -1 (com multiplicidade $p-1$), na origem (com multiplicidade p), e em ∞ (polo simples). Verificamos ainda que, para $p = 2, 3$, f_p^2 é hiperbólica, \mathcal{F}_p tem apenas duas componentes invariantes e \mathcal{J}_p é um quasecírculo (veja a figura 3). Experimentos numéricos iniciais sugerem a mesma conclusão para $p \geq 4$.

Referências

- [1] M. Artin e B. Mazur. “On Periodic Points”. Em: **Annals of Mathematics** 1 (1965), pp. 82–99.
- [2] L. Carleson e T. Gamelin. **Complex Dynamics**. 2nd Printing. Springer-Verlag, Universitext, 1996. ISBN: 0387979425.
- [3] J. Milnor. **Dynamics in one complex variable**. Third edition. Princeton: Princeton University Press, 2006. ISBN: 9780691124889.
- [4] D. Mumford, C. Series e D. Wright. **Indra’s Pearls: the vision of Felix Klein**. Reprint Edition. Cambridge University Press, 2016. ISBN: 1107564743.
- [5] A. Vieira et al. “Entropia máxima em inversões geométricas”. Em: **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática** (2018). Aceito. DOI: <https://doi.org/10.35819/remat2018v4i1id2585>.
- [6] A. Vieira et al. “Geometria plana, cadeia de Markov e caos”. Em: **CQD: Revista Eletrônica Paulista de Matemática** (2017). Aceito. DOI: 10.21167/cqdv0111201723169664avlmpfv3447.