Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Flutuações no Brilho da Via Láctea: Da Teoria de Ambartzumian ao Caso Fracionário.

Matheus Tobias Mendonça[1]
UFJF, Juiz de Fora, MG
Sandro Rodrigues Mazorche[2]
Departamento de Matemática - UFJF, Juiz de Fora, MG

Resumo. No presente trabalho, é realizada uma releitura de um modelo sobre a teoria das flutuações no brilho da Via Láctea, idealizado por Ambartzumian e Gordeladse em 1940 e descrito matematicamente por Chandrasekhar e Munch em 1950. De forma objetiva e clara, é apresentado o problema estatístico em que estrelas e nuvens interestelares ocorrem com uma distribuição uniforme. E seguida, é apresentada uma versão deste modelo em derivadas fracionárias, onde sua solução é dada por uma série de Dirichlet Generalizada pela função de Mittag-Leffler. É feito um caso numérico dos modelos descritos.

Palavras-chave. Equação de Ambarzumian, Derivada Fracionária, Flutuações de Brilho Estelares.

1 Introdução

O modelo que será tratado aqui foi idealizado nos anos 1940 por Ambartzumian e Gordeladse, e de forma incrível foi descrito matematicamente por Chandrasekhar e Munch em uma série de cinco artigos entre os anos 1950-1951 [2, 3]. Chandrasekhar e Munch, por meio de um modelo estatístico para inferir as propriedades de nuvens interestelares com base nas flutuações no brilho, em especial da Via Láctea, partem de uma equação integral de uma função de distribuição da intensidade do brilho e chegam a uma equação diferencial que é conhecida como equação de Ambartzumian. Assim, nossos estudos se iniciam com o modelo tratado nos dois primeiros artigos de Chandrasekhar e Munch [2]. Nestes, os autores modelam o problema com nuvens discretas, o que favorece a construção da equação diferencial, com uma matemática bem refinada e avançada mesmo para os dias de hoje, pois ao longo dos anos tem influenciados muitos pesquisadores e gerado muitos artigos sobre este tema.

As flutuações de brilho foram interpretadas como sendo influenciadas principalmente pelo número variável de nuvens absorventes discretas ao longo de uma linha de visão. Nestes cinco artigos [2] e [3], a matemática empregada é espetacularmente assustadora, mas as ideias básicas são simples e têm relevância direta hoje. Nos dois primeiros artigos [2], os autores derivaram uma equação integral-diferencial para as flutuações no brilho em termos da distribuição de frequência das extinções de nuvens. Esta equação pode ser vista como um exemplo específico da equação de Chapman-Kolmogorov [14], que descreve a distribuição de probabilidade de variáveis que sofrem ambas as mudanças contínuas bem como "saltos". Nos dois artigos subsequentes(III-IV) [3], eles resolvem essa equação para os casos em que o sistema de nuvens de extensão infinita é uma distribuição particular de extinção (artigo-II), o caso da extensão finita, mas de extinção constante por nuvem (artigo-III), e o caso geral de distribuições arbitrárias de extinção por extensão infinita (artigo-IV). Limber, em [7], generalizou em extensão finita, enquanto Munch, em [11], usou o modelo para estimar o comprimento da correlação na Via Láctea. Em todos os trabalhos acima

[1]tobias@ice.ufjf.br
[2]sandro.mazorche@ufjf.br

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0055

© 2023 SBMAC

citados, foi assumido um modelo em que as nuvens são entidades discretas, e é com essa ideia que trataremos aqui. Não iremos tratar aqui deste fato, mas é algo que gostaríamos de fazer no futuro: uma mudança substancial nas ideias do modelo tratado nos artigos I-IV é vista no artigo-V [3], no qual os autores consideraram substituir o modelo de nuvem discreta por um modelo estocástico contínuo para o campo de densidade. Como dito, pelos autores, no abstract do artigo-V [3]:

"...a nova visão pode ser considerada como uma alternativa ou um refinamento em relação à visão anterior, que visualiza o meio interestelar como consistindo de uma distribuição de nuvens discretas."

Nosso objetivo neste trabalho é iniciar a construção para o caso discreto. Assim na Seção 2, faremos uma apresentação breve do modelo como proposto em [2], onde a solução do modelo é uma distribuição dada por uma série de Dirichlet. Este fato será fundamental para nossa proposta de modelo fracionário que será apresentada na Seção 3, onde as soluções também serão dadas por uma série de Dirichlet por meio das funções de Mittag-Leffler de três parâmetros. Na Seção 4 apresentaremos uma simulação com as soluções dos modelos tratados na Seção 3 e, por fim, na Seção 5, fazemos as considerações finais.

2 O brilho de um modelo

Como descrito nos artigos I-II [2], o problema estatístico considerado supõe que estrelas e nuvens interestelares ocorrem com uma distribuição uniforme. Se o sistema se estende a uma distância linear L na direção de uma linha de visão e uma nuvem reduz a intensidade da luz das estrelas imediatamente atrás dela por um fator q, seja a ocorrência de nuvens com fator de transparência q governada por uma função de frequência $\psi(q)$. Dado tudo isso, é necessário encontrar a distribuição de probabilidade, $g(I, L)$, do brilho observado, I. A partir da consideração desse problema é conveniente reformular este problema em variáveis adimensionais, mostrando-se que a seguinte equação integral governa a distribuição do brilho [2]:

$$g(u,\xi) + \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial \xi} = \int_0^1 g\left(\frac{u}{q}, \xi\right) \psi(q) \frac{dq}{q}, \tag{1}$$

onde u é o brilho observado medido em unidades adequadas e ξ é o número médio de nuvens na direção da linha de visão. Mostra-se ainda que a equação integral (1) nos permite obter fórmulas explícitas para todos os momentos de g como funções de ξ e os momentos de $\psi(q)$. Estas conclusões tiveram um grande impacto e eram revolucionárias na época em que foram tiradas. Por exemplo, as flutuações conhecidas no brilho da Via Láctea podem ser interpretadas mais prontamente em termos das flutuações no número de nuvens absorventes na linha de visão. Pois, embora outros fatores indubitavelmente contribuam para as flutuações observadas, estes devem ser secundários ao efeito das flutuações no número de nuvens, uma vez que tão poucas delas geralmente estão envolvidas. De fato, em uma breve nota publicada em 1944, Ambartzumian formulou o seguinte problema que considerou básico para tal análise:

Deixe estrelas e nuvens absorventes ocorrerem com uma distribuição uniforme em um plano de extensão infinita. Além disso, deixe uma nuvem reduzir a intensidade da luz das estrelas imediatamente atrás dela por um fator q. Seja a ocorrência de nuvens com "transparência" q governada por uma função de frequência $\psi(q)$. Qual é, então, a distribuição de probabilidade do brilho observado?

Assim, para determinar a distribuição de probabilidade do brilho u, pediremos que a ocorrência de um determinado número de nuvens, n, no intervalo $(0, r)$, seja regida pela distribuição de Poisson,

$$e^{-r}\frac{r^n}{n!} \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \cdots \tag{2}$$

e neste caso, tomando $\xi \to \infty$, na equação (1), temos

$$g(u) + \frac{dg}{du} = \int_0^1 g\left(\frac{u}{q}\right)\psi(q)\frac{dq}{q}. \tag{3}$$

Iremos restringirmos nossos estudos aqui ao caso em que todas as nuvens são igualmente transparentes, ou seja, o fator q pelo qual uma nuvem reduz a intensidade da luz das estrelas imediatamente atrás dela é constante. Neste caso a equação (3) pode ser resolvida explicitamente e é dada por

$$\frac{dg}{du} + g(u) = \frac{1}{q}g\left(\frac{u}{q}\right). \tag{4}$$

Seus momentos são dados por

$$\mu_n = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}(1-q^i)}. \tag{5}$$

A equação (4) é conhecida como equação de Ambartzumian e uma solução para ela é dada por uma série geral de Dirichlet, que no campo da análise matemática, é uma série infinita da seguinte forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n s}, \tag{6}$$

onde A_n , s são números complexos e $\{\lambda_n\}$ é uma sequência estritamente crescente de números reais não negativos que tende ao infinito. Não é nosso foco neste trabalho desenvolver um estudo aprofundado destas séries, o que seria algo fantástico do ponto de vista da análise matemática, mas isso ficará para uma outra oportunidade. Aqui seguiremos as argumentações dadas em [2], o que já mostra o quanto de matemática refinada foi empregado no estudo deste modelo. Seja a solução definida por:

$$g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{1}{q^n}u}, \quad \text{onde } \; 0 < q < 1 \text{ e } A_n \text{ constantes reais.} \tag{7}$$

Substituindo a expressão (7) de $g(u)$ na equação (4) obtém-se a seguinte fórmula:

$$A_n\left(1 - \frac{1}{q^n}\right) = \frac{1}{q}A_{n-1}, \quad \text{com } \; n = 1, 2, 3, \cdots \tag{8}$$

Por argumentação de recursividade, podemos obter todos os coeficientes em função de A_0

$$A_n = A_0(-1)^n \frac{1}{q^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{q^k}{1-q^k}, \quad \text{com } \; n = 1, 2, 3, \cdots \tag{9}$$

A constante A_0 é arbitrária e pode ser encontrada se for considerada a equação (4) com condições adicionais, por exemplo: A função $g(u)$ foi modelada para ser uma distribuição do brilho em u, logo em $u = 0$ é de se esperar que $g(0) = 0$ e também que o momento zero seja unitário, $\mu_0 = \int_0^{\infty} g(u)du = 1$, assim como feito em [2]. Segue que A_0 é dado por:

$$A_0 = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)}. \tag{10}$$

 © 2023 SBMAC

Desta forma temos a solução do modelo em questão dada por

$$g(u) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty}(1-q^i)} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{q^k}{1-q^k}\right)\frac{e^{-\frac{1}{q^n}u}}{q^n}, \text{ onde } q \in (0,1). \tag{11}$$

Apesar de não fazermos aqui um estudo analítico desta série, pois não é o escopo do trabalho, fica o registro que ela tem uma convergência rápida, ou seja, necessita de poucos termos da série para convergir com uma boa acurácia. Quando tomamos valores de q próximos de 1, mais termos devem ser agregados à série.

3 Formulação do Modelo em Derivadas Fracionárias

Com a crescente popularização da aplicação do Cálculo Fracionário em modelos matemáticos clássicos, temos encontrado situações que não são compatíveis com a matemática empregada e nem com condições criadas ou impostas pela modelagem do problema. Tendo estas preocupações, ao longos do últimos anos, chamamos a atenção para tais fatos em [8–10]. Com este modelo, infelizmente, não foi diferente, como podemos ver, por exemplo, no artigo [1]. Neste caso, o problema maior não é a matemática usada para resolver a equação fracionária proposta; muito pelo contrário, a matemática empregada contém resultados e técnicas muito bem elaborados. Por exemplo, a equação (4) é um caso particular do extraordinário artigo de 1971 de equações diferenciais de Toso Kato [5]. Porém, para garantir que o modelo no caso clássico/fracionário tem solução, consideram $q > 1$ (fator de transparência, que por definição < 1) e, como condição inicial, $g(0) = 1$, embora $g(u)$ seja uma distribuição do brilho com $g(0) = 0$. Assim, eles acabam por resolver apenas uma equação diferencial fracionária, que entendemos que já é algo espetacular, mas infelizmente não podem afirmar que estão resolvendo o modelo de Flutuação no Brilho da Via Láctea. Desta forma, nossa proposta de modelo fracionário tenta aproximar ao máximo as condições impostas pelos "pais" do modelo [2]. Em primeiro lugar, observe que foi usado uma distribuição de Poisson (2), para determinar a distribuição do brilho u. Depois, da característica da equação (4), foi possível obter uma solução por meio de uma série de Dirichlet (6). Então, usaremos as ideias de Pillai [13], que relacionou as funções de Mittag-Leffler com distribuições, e o trabalho de Laskin [6], que descreve processos de Poisson fracionários. Assim, definiremos a solução dada pela seguinte série, que chamaremos de Série Generalizada de Dirichlet por Mittag-Leffler.

$$G^{\gamma}_{\alpha,\beta}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n u^{\beta-1} E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(-\lambda_n u^{\alpha}), u > 0, \tag{12}$$

onde $E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z)$ é a função de Mittag-Leffler de três parâmetros [12], $0 < \alpha \leq 1$, $\alpha \leq \beta$. Da equação (12) podemos obter três casos muito interessantes:

Caso 1: tomando $\alpha = 1$, $\beta = 1$ e $\gamma = 1$ temos a série de Dirichlet (6), do caso clássico.

Caso 2: tomando $\alpha < 1$, $\beta = 1$ e $\gamma = 1$ temos a Série Generalizada de Dirichlet por Mittag-Leffler de um parâmetro.

$$G^{1}_{\alpha,1}(u) = g_{C}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n E_{\alpha}(-\lambda_n u^{\alpha}) \quad , \quad u \geq 0. \tag{13}$$

Caso 3: tomando $\alpha < 1$, $\beta = \alpha$ e $\gamma = 1$ temos a Série Generalizada de Dirichlet por Mittag-Leffler de dois parâmetros.

$$G^{1}_{\alpha,\alpha}(u) = g_{RL}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n u^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n u^{\alpha}) \quad , \quad u > 0. \tag{14}$$

 © 2023 SBMAC

Partindo das seguinte relações [12],

$$ {}^{C}D_0^{\alpha}[E_\alpha(at^\alpha)] = aE_\alpha(at^\alpha) \ ; \qquad {}^{RL}D_0^{\alpha}[t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)] = at^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha) \ \ t>0, \tag{15} $$

propomos os seguintes modelos fracionários:

$$ \text{Modelo Fracionário Caputo} $$
$$ {}^{C}D_0^{\alpha}[g(u)] + g(u) = \frac{1}{q^\alpha} g\left(\frac{u}{q}\right) \tag{16} $$

$$ \text{Modelo Fracionário Riemann-Liouville} $$
$$ {}^{RL}D_0^{\alpha}[g(u)] + g(u) = \frac{1}{q} g\left(\frac{u}{q}\right) \tag{17} $$

De forma muito similar às contas feitas em [2], se partimos das expressões (13) e (14) como proposta de solução aos modelos (16) e (17) respectivamente, e usando a relação (15) podemos obter sem muito esforço, expressão para as constantes A_n como dado em (8), apenas observando que no lugar de q será q^α. E por recursividade obtemos:

$$ A_n = A_0(-1)^n \frac{1}{q^{\alpha n}} \prod_{k=1}^{n} \frac{q^{\alpha k}}{1-q^{\alpha k}}, \quad \text{com} \ \ n = 1,2,3,\cdots \tag{18} $$

Portanto, temos as soluções para os dois modelos a menos das constantes A_0^C e A_0^{RL}:

$$ \text{Solução do Modelo (16)} $$
$$ g_{C}(u) = A_0^C \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{q^{\alpha k}}{1-q^{\alpha k}}\right) \frac{E_\alpha(-\frac{1}{q^{\alpha n}}u^\alpha)}{q^{\alpha n}} \ \ , \ \ u \geq 0 \tag{19} $$

$$ \text{Solução do Modelo (17)} $$
$$ g_{RL}(u) = A_0^{RL} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{q^{\alpha k}}{1-q^{\alpha k}}\right) \frac{u^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\frac{1}{q^{\alpha n}}u^\alpha)}{q^{\alpha n}} \ \ , \ \ u > 0 \tag{20} $$

Da mesma forma como aconteceu no caso clássico, a determinação dos A_0^C e A_0^{RL} necessita de condições adicionais imposta às equações (16) e (17). Por exemplo, para o modelo (16), a condição de $g(0) = 0$ é factível, pois as Mittag-Leffler em zero são iguais a 1 e assim ficamos com um sistema igual ao apresentado em [2], apenas fazendo a correção de q para q^α, mas a condição de que $\int_0^\infty g_{C}(u)du = 1$, não é algo que sai tão fácil. Talvez nem seja possível, já que a integral da Mittag-Leffler de um parâmetro com $\alpha < 1$ explode, mas devemos fazer uma análise mais fina com estas Séries Generalizada de Dirichlet por Mittag-Leffler. Para o modelo (17), a condição de $\int_0^\infty g_{RL}(u)du = 1$ é viável, pois a integral de $\frac{u^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\frac{1}{q^{\alpha n}}u^\alpha)}{q^{\alpha n}}$ é dada por $-E_{\alpha,1}\left(-\frac{1}{q^{\alpha n}}u^\alpha\right)$. Assim, as contas serão similares ao caso clássico, apenas trocando q por p^α como feito em [2], mas observe que $g_{RL}(u)$ não está definida em $u = 0$ e assim devemos também fazer uma análise mais precisa com o limite desta solução quando u tende a zero.

Como podemos notar, não tem vida fácil no universo fracionário, os modelos não aparecem de graça ou com operações de apenas substituir a derivada clássica por uma fracionária. Mas, até este ponto, estamos bem satisfeitos com a nossa proposta de modelo fracionário. Sabemos que têm pontas para serem amarradas, arestas para serem polidas e detalhes a serem explicados, que com

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0055 © 2023 SBMAC

certeza trarão muita matemática boa para ser explorada. Assim, iremos supor que os A_0^c e A_0^{RL} nos modelos, (16) e (17), sejam dados por uma expressão similar a (10), apenas trocando q por q^α:

$$A_0 = \frac{1}{\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{\alpha n})}. \tag{21}$$

4 Resultados Numéricos

Nesta seção fazemos um estudo preliminar das soluções dos três modelos. O Modelo Clássico (11), o Modelo em derivada de Caputo (19) e o Modelo em derivada de Riemann-Liouville (20). Nos dois modelos fracionários usaremos como valor de A_0 a expressão (21). Usamos o código de R. Garrappa [4] para calcular os valores das Mittag-Leffler e o programa MatLab.

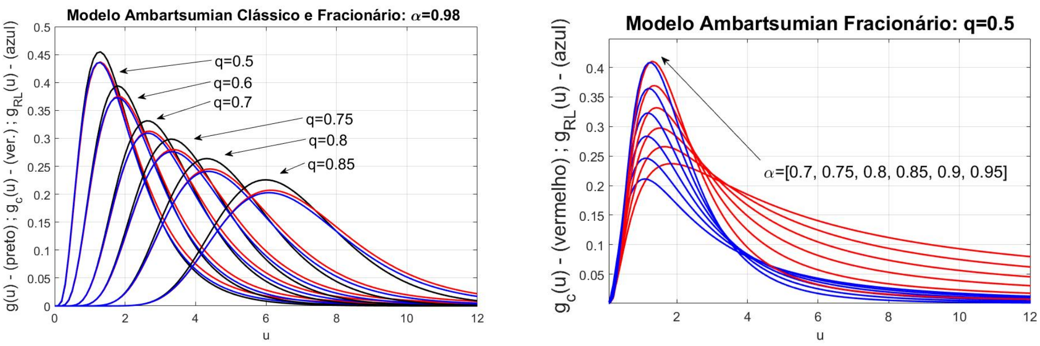

Figura 1: (a) e (b) Fonte: autor.

Na Figura 1 (a) temos as soluções $g(u)$, $g_C(u)$ e $g_{RL}(u)$ para diferentes valores de q e podemos notar nos casos de $g_C(u)$ e $g_{RL}(u)$ o efeito de cauda pesada que é característico das funções de Mittag-Leffler e assim é gerado uma assimetria mais acentuada com o formato de seus gráficos, o que não ocorre com o caso clássico $g(u)$. Já na Figura 1 (b) vemos uma variação do parâmetro α indicando quanto menor for o α mais temos o efeito da cauda pesada, ou seja, mais acentuada é a assimetria.

5 Considerações Finais

O objetivo do trabalho foi fazer uma releitura dos artigos I-II [2] de forma a propor uma versão deste modelo fracionário, que pudesse seguir as ideias de Ambartzumium ali tratadas nos artigos, sem se distanciar dos pontos principais da construção do modelo da Flutuação no Brilho da Via Láctea, como foi explorada de forma magnífica pela sequência dos cinco artigos [2, 3], por Chandrasekhar e Munch, no início dos anos 1950.

A matemática empregada nestes artigos é realmente algo que impressiona, desde a ideia da construção do modelo, à idealização de que a intensidade do brilho se dá por uma função de distribuição, passando pelo fato da solução ser dada por uma série de Dirichlet e as contas até chegar na solução final: é algo muito avançado até para os dias de hoje. Assim, seguimos o mais fielmente possível os caminhos traçados por Chandrasekhar e Munch. Inspirados nas ideias de que as funções de Mittag-Leffler descrevem uma distribuição [13] e do fato delas descreverem processos de Poisson fracionários [6], fomos levados a propor os modelos fracionários (16) e (17),

 © 2023 SBMAC

onde suas soluções são dadas por uma Série Generalizada de Dirichlet por Mittag-Leffler (19) e (20), respectivamente. Só do fato de estudar estas Séries Generalizadas de Direchlet por Mittag-Leffler, podemos gerar uma linda discussão matemática. Podemos ainda pensar, quem sabe, se é possível propor um modelo, da Flutuação no Brilho, baseado na derivada $(k, \Psi)-$Hilfer, pois as derivadas de Caputo e Riemann-Liouville são casos especiais dela. De qualquer forma, estamos confiantes que uma lapidação nestas ideias, aqui apresentadas, contribuirá em muito para o "brilho" da modelagem fracionária. Por fim, estamos apenas propondo uma nova "lente", de como olhar para essa Flutuação no Brilho (eterno enquanto dure) da Via Láctea.

Agradecimentos

Aos PPGM e PPGMC-UFJF. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências

[1] H. S. AlharbiWeam. "New Series Solution of the Caputo Fractional Ambartsumian Delay Differential Equationation by Mittag-Leffler Functions". Em: **Mathematics** (2021), 9(2)–(18). DOI: doi.org/10.3390/math9020157.

[2] S. Chandrasekhar e G. Münch. "The theory of the fluctuations in brightness of the Milky way. I-II." Em: **Astrophysical Journal** 112 (1950).

[3] S. Chandrasekhar e G. Münch. "The theory of the fluctuations in brightness of the Milky Way. III-IV-V". Em: **Astrophysical Journal** 114 (1951).

[4] R. Garrappa. "Numerical evaluation of two and three parameter Mittag-Leffler functions". Em: **SIAM Journal on Numerical Analysis** 53.3 (2015), pp. 1350–1369.

[5] T. Kato e J. McLeod. "The functional-differential equation". Em: **American Mathematical SocietY** 77.6 (1971).

[6] N. Laskin. "Fractional Poisson process". Em: **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**. Chaotic transport and complexity in classical and quantum dynamics 8(3-4) (2003), pp. 201–213. DOI: 10.1016/s1007-5704(03)00037-6.

[7] D. N. Limber. "Fluctuations in Brightness of the Milky way." Em: **The Astrophysical Journal** 117 (1953), p. 145.

[8] N. Z. Monteiro e S. R. Mazorche. "Limitations and applications in a fractional Barbalat's Lemma". Em: **Fract. Calc. Appl. Anal.** (2023), pp. 253–275. DOI: 0.1007/s13540-022-00111-6.

[9] N. Z. Monteiro e S. R. Mazorche. "Modelos epidemiológicos fracionários: o que se perde, o que se ganha, o que se transforma?" Em: (2021), 010448–1–7. DOI: 0.1007/s13540-022-00111-6.

[10] N. Z. Monteiro e S. R. Mazorche. "Some remarks on an arbitrary-order SIR model constructed with Mittag-Leffler distribution". Em: **Matemática Contemporânea** 51 (2022), pp. 25–42.

[11] G. Münch. "The Theory of the Fluctuations in Brightness of the Milky way. VI." Em: **The Astrophysical Journal** 121 (1955), p. 291.

[12] E. C. Oliveira. **Solved Exercises in Fractional Calculus**. Volume 240. São Paulo: Springer, 2019. ISBN: 978-3-030-20524-9.

[13] R. N. Pillai. "On Mittag-Leffler functions and related distributions". Em: **Annals of the Institute of statistical Mathematics** V. 42, N. 1 (1990), pp. 157–161.

[14] S. M. Ross. **Introduction to Probability Models**. 11th. ed. San Diego, CA, USA: Academic Press is an imprint of Elsevier, 2014. ISBN: 978-0-12-407948-9.

 © 2023 SBMAC