

# Pontos de equilíbrio e estabilidade em um modelo SIR fracionário construído com funções de Mittag-Leffler

Sandro Rodrigues Mazorche<sup>1</sup>, Noemi Zeraick Monteiro<sup>2</sup>  
UFJF, Juiz de Fora, MG

**Resumo.** Trabalhos anteriores têm apontado para a necessidade de construção de um modelo SIR de ordem arbitrária com significado físico preciso. Para tanto, uma proposta é considerar a distribuição do tempo de espera no compartimento infeccioso e a dependência da idade de infecção na infectividade segundo funções de Mittag-Leffler. Este trabalho pretende completar discussões anteriores, exibindo demonstrações de resultados de estabilidade para o modelo proposto.

**Palavras-chave.** Modelo SIR, Derivadas Fracionárias, Funções de Mittag-Leffler, Estabilidade

## 1 Introdução

A modelagem fracionária permite capturar a dependência de estágios anteriores em materiais ou processos, retratando mais fielmente fenômenos de diversas naturezas. Geralmente, ela consiste em flexibilizar um modelo clássico em EDOs ou EDPs substituindo derivadas de ordem inteira por derivadas fracionárias. Em particular, modelos fracionários compartimentais têm sido estudados em diversas aplicações. Na busca por modelos fracionários construtivos com significado biológico mais claro, apresentamos em trabalhos anteriores uma derivação física de um modelo de ordem arbitrária [3], em que é utilizada a linguagem probabilística dos Passeios Aleatórios de Tempo Contínuo (PATC) [1].

O principal objetivo deste trabalho é a análise do ponto de equilíbrio tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} (S, I, R) = (S^*, I^*, R^*)$ , em que o limite é tomado coordenada a coordenada. Para tanto, não são válidas técnicas simples de EDOs autônomas e resultados clássicos de estabilidade. Em particular, é recente a discussão sobre a falibilidade do Lema de Barbalat e das teorias básicas de Lyapunov para modelos fracionários [5]. Considerando o efeito memória apenas para a remoção, em uma referência de [1], os mesmos autores apresentam hipóteses e sugerem utilizar a formulação integral do modelo para os estudos de estabilidade. Depois de uma translação dos equilíbrios para a origem, o comportamento assintótico do sistema resultante de equações integrais não lineares de Volterra é dado de forma equivalente pelo comportamento assintótico de sua linearização como um sistema de equações lineares integrais de Volterra. Esse resultado notável foi usado por Hethcote e Tudor para inferir a estabilidade local de equilíbrios do modelo epidemiológico integral proposto em [2]. Partimos desse caminho para apresentamos os próximos resultados, formulados sem demonstração em nosso trabalho [4].

## 2 O modelo

Considere um indivíduo infectado desde  $t'$ . No período de  $t$  a  $t + \Delta T$ , o número esperado de novas infecções por indivíduo é dado por  $\sigma(t, t')S(t)\Delta T/N$ . A taxa de transmissão por indivíduo

---

<sup>1</sup>sandro.mazorche@ufjf.br

<sup>2</sup>nzmonteiro@ice.ufjf.br

infeccioso  $\sigma(t, t')$  depende tanto da idade da infecção,  $t - t'$ , quanto do tempo atual,  $t$ . A probabilidade de um indivíduo infectado no momento  $t'$  ainda estar infectado no momento  $t$  é dada pela função de sobrevivência  $\Phi(t, t')$ . Assim, o fluxo de indivíduos para  $I$  é recursivamente dado por

$$q^+(I, t) = \int_{-\infty}^t \sigma(t, t') \frac{S(t)}{N} \Phi(t, t') q^+(I, t') dt'. \tag{1}$$

A condição inicial considera o tempo em que cada indivíduo se infectou, antes do tempo  $t = 0$ . Isso é dado pela função  $i(-t', 0)$ , de modo que  $q^+(I, t') = i(-t', 0)/\Phi(0, t')$  para  $t' < 0$ . Consideramos  $i(-t, 0) = i_0 \delta(-t)$ , em que  $\delta(t)$  é a função delta de Dirac. Então,

$$q^+(I, t) = \int_0^t \sigma(t, t') \frac{S(t)}{N} \Phi(t, t') q^+(I, t') dt' + i_0 \sigma(t, 0) \frac{S(t)}{N} \Phi(t, 0). \tag{2}$$

A taxa de infecção  $\sigma(t, t')$  é uma função tanto do tempo atual, tendo uma infecciosidade extrínseca  $\omega$ , quanto da idade de infecção  $t - t'$ , tendo uma infecciosidade intrínseca  $\rho$ . Assim,

$$\sigma(t, t') = \omega(t) \rho(t - t'). \tag{3}$$

Assumindo que a morte natural e a remoção de um indivíduo são processos independentes,

$$\Phi(t, t') = \phi(t - t') \theta(t, t'); \quad \theta(t, t') = e^{-\int_{t'}^t \gamma(u) du}, \tag{4}$$

onde  $\phi(t - t')$  é a probabilidade de um indivíduo infectado desde  $t'$  ainda não ter se recuperado ou morrido pela doença no tempo  $t$ . Além disso,  $\theta(t, t')$  é a probabilidade de um indivíduo infectado desde  $t'$  ainda não ter morrido de morte natural até o tempo  $t$ , em que  $\gamma$  é a taxa de mortalidade.

Podemos expressar o número de indivíduos infectados da seguinte forma:

$$I(t) = I_0(t) + \int_0^t \Phi(t, t') q^+(I, t') dt', \tag{5}$$

onde a função  $I_0(t)$  fornece o número de indivíduos que foram infectados em 0 e permanecem infecciosos em  $t$ . Agora, podemos construir as equações principais do modelo. Derivando Eq. (5),

$$\frac{dI(t)}{dt} = q^+(I, t) - \int_0^t \psi(t - t') \theta(t, t') q^+(I, t') dt' - \gamma(t) \int_0^t \phi(t - t') \theta(t, t') q^+(I, t') dt' + \frac{dI_0(t)}{dt}, \tag{6}$$

onde  $\psi(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt}$ . Observe que a distribuição cumulativa a variável aleatória contínua  $X$  que fornece o tempo de saída do indivíduo do compartimento infeccioso é definida por  $F(t) = P(X \leq t)$ , sendo tal que  $F(t) = 1 - \phi(t)$ . Portanto, a função de densidade de probabilidade de  $X$  é  $\psi(t)$ .

Definindo núcleos de memória de infecciosidade e recuperação, obtemos equações integrais para o modelo SIR. As derivadas fracionárias são obtidas de maneira construtiva escolhendo funções de Mittag-Leffler adequadas para  $\phi(t)$  (probabilidade de permanência) e  $\rho(t)$  (infecciosidade intrínseca) [3]. Consideramos o efeito memória na remoção ao escrevermos

$$\psi(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\tau^\alpha} E_{\alpha, \alpha} \left( -\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \right); \quad \phi(t) = E_{\alpha, 1} \left( -\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \right), \tag{7}$$

para  $0 < \alpha \leq 1$ , em que  $\tau$  é um parâmetro de escala. Para o kernel da memória de infectividade:

$$\rho(t) = \frac{1}{\phi(t)} \frac{t^{\beta-1}}{\tau^\beta} E_{\alpha, \beta} \left( -\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \right). \tag{8}$$

Tomamos  $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ , garantindo  $\rho(t) \geq 0$ . Com técnicas de transformada de Laplace, obtemos no modelo derivadas de Riemann-Liouville  $D^{1-\alpha} := D_{0+}^{1-\alpha}$  e  $D^{1-\beta} := D_{0+}^{1-\beta}$  [3]:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \gamma(t)N - \frac{\omega(t)S(t)\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)S(t); \tag{9}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\omega(t)S(t)\theta(t,0)}{N\tau^\beta} D^{1-\beta} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \frac{\theta(t,0)}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)I(t); \tag{10}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{\theta(t,0)}{\tau^\alpha} D^{1-\alpha} \left( \frac{I(t)}{\theta(t,0)} \right) - \gamma(t)R(t). \tag{11}$$

Se  $\alpha = \beta = 1$ , temos uma distribuição exponencial, sendo  $\tau$  o tempo médio de recuperação.

### 3 Pontos de equilíbrio e estabilidade

Consideramos  $\gamma(t) \equiv \gamma$  constante, de onde  $\theta(t,0) = e^{-\gamma t}$ . Tomando o limite quando  $t \rightarrow \infty$ , calculamos os limites da forma  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\gamma t} D^{1-\alpha} (I(t)e^{\gamma t})$  conforme [6]. Supondo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \omega^*$ , obtemos um estado livre de doença,

$$S^* = N, \quad I^* = 0, \quad R^* = 0, \tag{12}$$

e, se  $\omega^* > 0$ , também encontramos um estado endêmico:

$$S^* = \frac{((\tau\gamma)^{\beta-\alpha} + (\tau\gamma)^\beta)N}{\omega^*}, I^* = \frac{N(\tau\gamma)^\alpha}{1 + (\tau\gamma)^\alpha} - \frac{N(\tau\gamma)^\beta}{\omega^*}, R^* = \frac{N}{1 + (\tau\gamma)^\alpha} - \frac{N(\tau\gamma)^{\beta-\alpha}}{\omega^*}. \tag{13}$$

O caso particular  $\omega(t) \equiv \omega$  é o mesmo obtido em [1]. Observamos que o estado endêmico faz sentido físico apenas se pudermos ter  $I^* > 0$  e  $R^* > 0$ , ou seja, se

$$\omega^* > (\tau\gamma)^{\beta-\alpha} + (\tau\gamma)^\beta, \tag{14}$$

o que possui relação com o  $\mathfrak{R}_0$  do modelo [4].

Provamos, assim, que se existem equilíbrios assintoticamente estáveis para o caso  $\gamma > 0$ , então são dados pelas Eq.(12)-(13). É importante citar que o caso limite no qual a dinâmica vital é nula foi estudado em [4]. Com  $\gamma > 0$ , espera-se que o estado livre de doença seja um equilíbrio assintoticamente estável quando  $\omega^* < (\tau\gamma)^{\beta-\alpha} + (\tau\gamma)^\beta$ , enquanto o estado endêmico deve ser assintoticamente estável se  $\omega^* > (\tau\gamma)^{\beta-\alpha} + (\tau\gamma)^\beta$ , hipótese formulada em [1] para  $\omega(t)$  constante.

Baseados em [2], precisamos das formas integrais dos infecciosos e dos recuperados:

$$I(t) = I_0(t) + \int_0^t \Phi(t-t') \frac{\omega(t')S(t')\theta(t')}{N\tau^\beta} \left( D^{1-\beta} \left( \frac{I(t')}{\theta(t',0)} \right) \right) (t') dt', \tag{15}$$

$$R(t) = i_0\theta(t) - I_0(t) + \int_0^t F(t-t')\theta(t-t') \frac{\omega(t')S(t')\theta(t')}{N\tau^\beta} \left( D^{1-\beta} \left( \frac{I(t')}{\theta(t',0)} \right) \right) (t') dt'. \tag{16}$$

São demonstrados os seguintes resultados:

**Teorema 3.1.** *Se  $\omega(t)$  é limitado com  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \omega^*$ ,  $\gamma(t) \equiv \gamma$  e  $\beta = 1$  no sistema (9)-(11), o equilíbrio livre de doença da Eq. (12) é globalmente assintoticamente estável se  $\omega^* < (\tau\gamma)^{1-\alpha} + (\tau\gamma)$ .*

*Demonstração.* Definimos a constante  $A$  tal que

$$A = \int_0^\infty \frac{\omega^*}{\tau} \Phi(t) dt = \frac{\omega^*}{(\tau\gamma) + (\tau\gamma)^{1-\alpha}} < 1. \tag{17}$$

Seja  $J = \limsup_{t \rightarrow \infty} I(t)$  e suponhamos por absurdo que  $J > 0$ . Assim, é possível escolher  $\epsilon$  suficientemente pequeno tal que  $2\epsilon + A(1 + \epsilon)(J + \epsilon) < J$ . Com efeito, definindo a função contínua crescente  $E(t) = 2t + A(1 + t)(J + t)$ , temos  $E(0) = AJ < J$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = \infty$ , donde existe  $\epsilon_J > 0$  tal que  $E(\epsilon_J) = J$ . Basta, portanto, escolhermos  $\epsilon \in (0, \epsilon_J)$ .

Agora, temos  $\lim_{t \rightarrow 0} I_0(t) = 0$ . Além disso, sabemos que  $\limsup_{t \rightarrow \infty} I(t) = J$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \omega^*$ . Assim, escolhido esse  $\epsilon$ , podemos escolher um tempo  $t_1 > 0$  suficientemente grande tal que  $I_0(t) < \epsilon/2$ ,  $I(t) < J + \epsilon$  e  $\omega(t) < (1 + \epsilon)\omega^*$  para  $t > t_1$ . Escolhido  $t_1$ , uma vez que  $\lim_{t \rightarrow 0} \theta(t) = 0$ , podemos escolher  $t_2$  suficientemente grande tal que  $Nt_1\theta(t)\omega_m/\tau < \epsilon$  para  $t > t_2$ , em que  $\omega_m$  é o valor máximo atingido por  $\omega(t)$ . Então, para  $t > t_1 + t_2$ , temos  $t - t_1 > t_2$  e

$$I(t) = I_0(t) + \int_0^t \Phi(t - t') \frac{\omega(t')S(t')I(t')}{N\tau} dt' \tag{18}$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \int_0^{t_1} \Phi(t - t') \frac{\omega(t')S(t')I(t')}{N\tau} dt' + \int_{t_1}^t \Phi(t - t') \frac{\omega(t')S(t')I(t')}{N\tau} dt'. \tag{19}$$

Agora, lembramos que  $S(t), I(t) \leq N$  e, na primeira integral usamos que  $\Phi(t) = \phi(t)\theta(t) \leq \theta(t)$ , enquanto, na segunda integral, usamos que  $I(t) < J + \epsilon$  e  $\omega(t) < (1 + \epsilon)\omega^*$  para  $t > t_1$ , obtendo

$$I(t) < \frac{\epsilon}{2} + N \int_0^{t_1} \theta(t - t') \frac{\omega_m}{\tau} dt' + (J + \epsilon)(1 + \epsilon) \int_{t_1}^t \Phi(t - t') \frac{\omega^*}{\tau} dt'. \tag{20}$$

Finalmente, como  $t - t_1 > t_2$ , temos  $\theta(t - t_1) < \theta(t_2)$ . Além disso, pela definição de  $A$ , temos  $\int_{t_1}^t \Phi(t - t') \omega^*/\tau dt' < A$ . Logo, pela escolha de  $\epsilon, t_1$  e  $t_2$ , vem que, para todo  $t > t_1 + t_2$ , temos

$$I(t) < \frac{\epsilon}{2} + Nt_1\theta(t_2) \frac{\omega_m}{\tau} + A(1 + \epsilon)(J + \epsilon) < \frac{3\epsilon}{2} + A(1 + \epsilon)(J + \epsilon) < J - \frac{\epsilon}{2}, \tag{21}$$

contradição. Portanto,  $J = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ .

Lembrando que, nas condições do enunciado, temos

$$\frac{dS(t)}{dt} = \gamma N - \frac{\omega(t)S(t)I(t)}{N\tau} - \gamma S(t), \tag{22}$$

então  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$  implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = N$ . Portanto,  $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (N - I(t) - S(t)) = 0$ . □

**Teorema 3.2.** *Se  $\omega(t) \equiv \omega$ ,  $\gamma(t) \equiv \gamma$  e  $\beta = 1$  no sistema (9)-(11), o equilíbrio endêmico da Eq. (13) é localmente assintoticamente estável sempre que é viável, isto é, quando  $\omega > (\tau\gamma)^{1-\alpha} + (\tau\gamma)$ .*

*Demonstração.* Temos  $\mathfrak{R}_0 = \int_0^\infty \sigma(t)\Phi(t)dt = N/S^*$ . Lembramos que, se  $\beta = 1$  e  $\omega$  é constante, então  $\sigma(t) \equiv \omega/\tau$ . Logo,

$$I^* = \int_0^\infty \sigma(t')\Phi(t')dt' \cdot \frac{S^*}{N} I^* = \int_0^\infty \Phi(t') \frac{S^* I^* \omega}{N\tau} dt' = \int_0^t \Phi(t - t') \frac{S^* I^* \omega}{N\tau} dt' + \int_t^\infty \Phi(t') \frac{S^* I^* \omega}{N\tau} dt'. \tag{23}$$

Agora, observamos que

$$\int_0^\infty \frac{\omega}{\tau} F(t')\theta(t')dt' = \int_0^\infty \frac{\omega}{\tau} \theta(t')dt' - \frac{N}{S^*} = \frac{\omega}{\tau\gamma} - \frac{N}{S^*} = \frac{N}{S^*} (\tau\gamma)^{-\alpha} = (\tau\gamma)^{-\alpha} \int_0^\infty \frac{\omega}{\tau} \Phi(t')dt', \tag{24}$$

ou seja,

$$\frac{N}{S^*} = \int_0^\infty \frac{\omega}{\tau} \Phi(t')dt' = (\tau\gamma)^\alpha \int_0^\infty \frac{\omega}{\tau} F(t')\theta(t')dt'. \tag{25}$$

Voltando à Eq. (14), notamos que  $R^* = (\tau\gamma)^{-\alpha} I^*$ . Assim, escrevemos

$$\begin{aligned} R^* &= (\tau\gamma)^{-\alpha} (\tau\gamma)^\alpha \int_0^\infty \frac{\omega}{\tau} F(t')\theta(t') dt' \cdot \frac{S^*}{N} \cdot I^* = \int_0^\infty F(t')\theta(t') \frac{S^* I^* \omega}{N\tau} dt' \\ &= \int_0^t F(t-t')\theta(t-t') \frac{S^* I^* \omega}{N\tau} dt' + \int_t^\infty F(t')\theta(t') \frac{S^* I^* \omega}{N\tau} dt'. \end{aligned} \tag{26}$$

Fazemos  $V = I - I^*$  e  $W = R - R^*$  para transladar o equilíbrio à origem. Então, pelas Eq.(15), (16), (23) e (26) e observando que  $SI - S^*I^* = S^*V - I^*(V + W) - V(V + W)$ , obtemos

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \Phi(t-t')\omega/N\tau & 0 \\ F(t-t')\theta(t-t')\omega/N\tau & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (S^*V - I^*(V + W) - V(V + W))(t') \\ (V + W)(t') \end{bmatrix} dt', \tag{27}$$

em que

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0(t) - \int_t^\infty \Phi(t') \cdot \frac{S^* I^* \omega}{N\tau} dt' \\ i_0\theta(t) - I_0(t) - \int_t^\infty F(t')\theta(t') \frac{S^* I^* \omega}{N\tau} dt' \end{bmatrix}. \tag{28}$$

O sistema integral não linear de Volterra da Eq. (27) pode ser escrito na forma matricial como:

$$X(t) = F(t) + \int_0^t A(t-t')G(X(t'))dt', \tag{29}$$

em que

$$X = \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} \Phi\omega/N\tau & 0 \\ F\theta\omega/N\tau & 0 \end{bmatrix}; G(X) = \begin{bmatrix} S^*V - I^*(V + W) - V(V + W) \\ V + W \end{bmatrix}. \tag{30}$$

A equação característica da linearização da Eq. (29) é

$$\det \left( \text{Identidade} - \int_0^\infty e^{-\lambda t} A(t)J dt \right) = 0, \tag{31}$$

em que  $J$  é a jacobiana de  $G$  avaliada em 0.

A análise da estabilidade da origem utiliza um resultado citado em [2]: *Se as soluções da Eq. (29) existem em  $[0, \infty)$  e são limitadas,  $F(t) \in C[0, \infty)$ ,  $F(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $A(t) \in L^1[0, \infty)$ ,  $G(X) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $G(0) = 0$ ,  $J$  é não singular e a Eq. (31) não possui raízes com partes reais não negativas, então a origem é um equilíbrio localmente assintoticamente estável.*

A maior parte das condições é bastante direta. Em particular,  $F(t) \rightarrow 0$  devido à existência da Transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler. Precisamos provar que não existem raízes características da Eq. (31) com parte real positiva. Primeiro, calculamos  $J$ , obtendo

$$J = \begin{bmatrix} S^* - I^* - 2V & -I^* - V \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{V=W=0} = \begin{bmatrix} S^* - I^* & -I^* \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Assim, a equação característica é dada por

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \int_0^\infty \begin{bmatrix} e^{-\lambda t} \Phi(t)\omega(S^* - I^*)/N\tau & -e^{-\lambda t} \Phi(t)I^*\omega/N\tau \\ e^{-\lambda t} F(t)e^{-\gamma t}\omega(S^* - I^*)/N\tau & -e^{-\lambda t} F(t)e^{-\gamma t}I^*\omega/N\tau \end{bmatrix} dt \right) = 0. \tag{33}$$

Observamos que as integrais têm a forma de uma transformada de Laplace e, no artigo original [2], é pedida a hipótese de que a probabilidade de permanência  $\phi$  seja dominada por um decaimento exponencial, de maneira a garantir a existência da transformada. A função de Mittag-Leffler não é dominada pelo decaimento exponencial, mas essa transformada existe se  $\text{Re}(\lambda) > -\gamma$ .

A Eq. (31) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(t)(S^* - I^*) \frac{\omega}{N\tau} dt\right) \left(1 + \int_0^\infty e^{-\lambda t} F(t)e^{-\gamma t} I^* \frac{\omega}{N\tau} dt\right) \\ & - \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(t) I^* \frac{\omega}{N\tau} dt\right) \left(-\int_0^\infty e^{-\lambda t} F(t)e^{-\gamma t} (S^* - I^*) \frac{\omega}{N\tau} dt\right) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Simplificando,

$$1 - \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(t)(S^* - I^*) \frac{\omega}{N\tau} dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t} F(t)e^{-\gamma t} I^* \frac{\omega}{N\tau} dt = 0. \quad (35)$$

Finalmente, como  $\Phi(t) = \theta(t)\phi(t) = e^{-\gamma t}(1 - F(t))$ , temos

$$1 - \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\gamma t} (S^* - I^*) \frac{\omega}{N\tau} dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t} F(t)e^{-\gamma t} (S^* - I^*) \frac{\omega}{N\tau} dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t} F(t)e^{-\gamma t} I^* \frac{\omega}{N\tau} dt = 0, \quad (36)$$

$$1 - \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\gamma t} (1 - F(t)) S^* \frac{\omega}{N\tau} dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\gamma t} I^* \frac{\omega}{N\tau} dt = 0. \quad (37)$$

A condição  $\omega > (\tau\gamma)^{1-\alpha} + (\tau\gamma)$  equivale a

$$\frac{N}{S^*} = \int_0^\infty \Phi(t) \frac{\omega}{\tau} dt = \int_0^\infty e^{-\gamma t} (1 - F(t)) \frac{\omega}{\tau} dt > 1. \quad (38)$$

Supondo por absurdo que  $Re(\lambda) \geq 0$ , então

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} (1 - F(t)) \frac{\omega}{\tau} dt = \frac{N}{S^*} > Re\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\gamma t} (1 - F(t)) \frac{\omega}{\tau} dt\right). \quad (39)$$

Logo,

$$1 > Re\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\gamma t} (1 - F(t)) S^* \frac{\omega}{N\tau} dt\right), \quad (40)$$

e, para cumprir a Eq. (37), será necessário ter

$$Re\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\gamma t} I^* \frac{\omega}{N\tau} dt\right) < 0. \quad (41)$$

Mas, veja que, se  $Re(\lambda) > -\gamma$ , temos

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\gamma t} I^* \frac{\omega}{N\tau} dt = \frac{\omega I^*}{(\lambda + \gamma)N\tau}. \quad (42)$$

Sendo  $\lambda = a + bi$  com  $a \geq 0$ , temos

$$\frac{\omega I^*}{(\lambda + \gamma)N\tau} = \frac{\omega I^*}{N\tau} \cdot \frac{1}{(a + \gamma) + bi} \cdot \frac{(a + \gamma) - bi}{(a + \gamma) - bi} = \frac{\omega I^*}{N\tau} \cdot \frac{(a + \gamma) - bi}{(a + \gamma)^2 + b^2}, \quad (43)$$

seguindo que

$$Re\left(\frac{\omega I^*}{(\lambda + \gamma)N\tau}\right) = \frac{\omega I^*(a + \gamma)}{N\tau((a + \gamma)^2 + b^2)} > 0, \quad (44)$$

contradição com (41). Portanto, o equilíbrio  $(S^*, I^*, R^*)$  é localmente assintoticamente estável.  $\square$

As Figuras 1 e 2 ilustram os Teoremas 3.1 e 3.2, com diferentes condições iniciais.

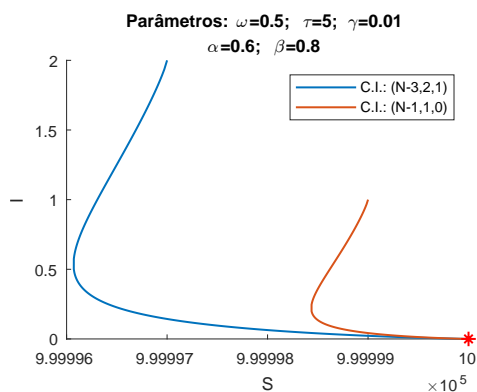


Figura 1: Trajetórias  $\mathfrak{R}_0 < 1$ .

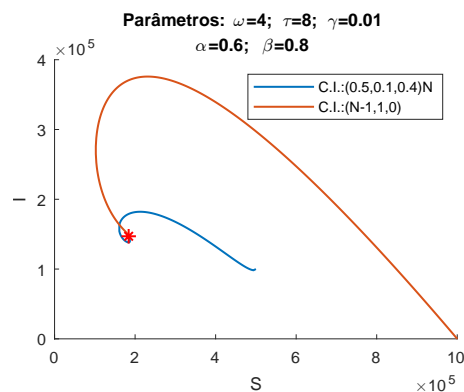


Figura 2: Trajetórias  $\mathfrak{R}_0 > 1$ .

## 4 Considerações Finais

Discutimos e provamos dois teoremas com respeito aos pontos de equilíbrio do modelo (9)-(11). Provamos algumas hipóteses e mantivemos outras em aberto, como a conjectura de que toda a região com  $i_0 > 0$  é uma região de estabilidade para  $(S^*, I^*, R^*)$ .

O caso  $\beta < 1$  ainda não foi analisado. Recentemente, foi publicada em [7] a análise global dos equilíbrios de um modelo SIS, cuja formulação se relaciona ao modelo (9)-(11) com  $\beta = 1$ . A passagem da estabilidade local para a estabilidade global dá-se por meio de uma abordagem geométrica para problemas de estabilidade global. Acreditamos que esta abordagem pode ser utilizada com sucesso para que o Teorema 3.2 seja válido de maneira global.

## Agradecimentos

Aos PPGM e PPGMC-UFJF. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

## Referências

- [1] C. N. Angstmann, B. I. Henry e A. V. McGann. “A fractional-order infectivity and recovery SIR model”. Em: **Fractal and Fractional** 1.1 (2017), p. 11.
- [2] H. W. Hethcote e D. W. Tudor. “Integral equation models for endemic infectious diseases”. Em: **Journal of mathematical biology** 9.1 (1980), pp. 37–47.
- [3] N. Z. Monteiro. “Aplicação do Cálculo de Ordem Arbitrária à Epidemiologia”. Orientação de S. R. Mazorche. Dissertação de mestrado. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, 2021.
- [4] N. Z. Monteiro e S. R. Mazorche. **Analysis and application of a fractional SIR model constructed with Mittag-Leffler distribution**. Online, 2021.
- [5] N. Z. Monteiro e S. R. Mazorche. “Limitations and applications in a fractional Barbalat’s Lemma”. Em: **Fractional Calculus and Applied Analysis** 26.1 (2023), pp. 253–275.
- [6] N. Z. Monteiro e S. R. Mazorche. “Some remarks on an arbitrary-order SIR. model constructed with Mittag-Leffler distribution”. Em: **Matemática Contemporânea** 51 (2022), pp. 25–42.
- [7] Z. Wu et al. “Global stability of a fractional order SIS. epidemic model”. Em: **Journal of Differential Equations** 352 (2023), pp. 221–248.