Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma condição de otimalidade de segunda ordem para Problemas com Restrição de Cardinalidade

Jean Carlos Medeiros[1]
UNICAMP, Campinas, SP
Ademir A. Ribeiro[2] Mael Sachine[3]
UFPR, Curitiba, PR
Leonardo Secchin[4]
UFES, São Mateus, ES

Resumo. Neste trabalho propusemos duas novas condições necessárias de segunda ordem para o problema de programação matemática com restrições de cardinalidade (cuja sigla, em inglês, é MPCaC), referidas como MPCaC-SSONC e MPCaC-WSONC, que são baseadas no conceito de primeira ordem de M-estacionariedade. Também discutimos condições de qualificação (CQ) necessárias para que a M-estacionariedade de segunda ordem seja válida nos minimizadores. Também propusemos uma CQ de posto constante relaxado especializada (MPCaC-RCRCQ) para otimalidade de segunda ordem em MPCaC. Por fim comparamos esses resultados com trabalhos anteriores que utilizaram diferentes linearizações do conjunto viável e conceitos de estacionariedade.

Palavras-chave. Problemas com Restrições de Cardinalidade, Condições de Qualificação, Condições de Otimalidade de Segunda Ordem

1 Introdução

Nosso problema de interesse é o problema com restrições de cardinalidade, o qual iremos denotar como MPCaC[5] e pode ser escrito como

$$\text{minimizar} \quad f(x) \quad \text{sujeito a} \quad g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0, \quad \|x\|_0 \leq \alpha, \tag{1}$$

em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ são funções de classe C^2, $0 < \alpha < n$ é um número natural dado e $\|x\|_0$ é a cardinalidade do vetor $x \in \mathbb{R}^n$, ou seja, o número de componentes não nulas de x. É importante ressaltar que a restrição de cardinalidade $\|\cdot\|_0 \leq k$ não define uma norma e não é uma restrição contínua nem convexa. Isso torna o problema associado a essa restrição mais desafiador e peculiar do que um problema padrão de programação não linear (PNL). Apesar disso, o problema tem sido amplamente estudado em várias áreas, incluindo otimização de *portfolio*, *compressing sense* e *subset selection in regression*. Para obter mais informações sobre o assunto, consulte as referências [4, 11] e outras citadas nesses trabalhos.

Embora seja possível transformar completamente o Problema (1) em um modelo inteiro-misto, é usual na literatura abordar (1) em sua forma contínua, utilizando PNL, conforme o modelo:

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0, \\ & n - e^T y \leq \alpha, \quad y \leq e, \quad x * y = 0, \end{array} \tag{2}$$

[1]jeancarlos@ime.unicamp.br
[2]ademir.ribeiro@ufpr.br
[3]mael@ufpr.br
[4]leonardo.secchin@ufes.br
[5]*Mathematical Programs with Cardinality Constraints*

 © 2023 SBMAC

em que $e^T = (1\ 1\ \ldots 1) \in \mathbb{R}^n$. Diversos autores têm abordado o Problema (1) por meio de PNL contínua, como pode ser visto em [5–7]. É válido mencionar que a reformulação relaxada utilizada neste trabalho apresenta uma pequena diferença em relação às abordagens presentes em [5, 6], pois não impomos a restrição $y \geq 0$, como é feito em [7]. No entanto, essa diferença não afeta os resultados. Por fim, cabe destacar que esta publicação é uma versão condensada de um artigo submetido [9].

Notação. Ao longo deste trabalho, o produto de Hadamard entre dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$, ou seja, o vetor obtido pelo produto componente a componente de x e y, é denotado por $x * y$. Também usamos os seguintes conjuntos de índices: $I_g(x) = \{i \mid g_i(x) = 0\}$, $I_g^+(x) = \{j \in I_g(x) \mid \mu_j > 0\}$[6] e $I_0(x) = \{i \mid x_i = 0\}$.

2 Conceitos Fundamentais de MPCaC

2.1 Estacionariedade

Considere a função Lagrangiano $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ associada com (1), dada por

$$\mathcal{L}(x, \mu, \lambda, \gamma) = f(x) + \mu^T g(x) + \lambda^T h(x) + \gamma^T x.$$

Nós temos $\nabla_x \mathcal{L}(x, \mu, \lambda, \gamma) = \nabla f(x) + \nabla g(x)^T \mu + \nabla h(x)^T \lambda + \gamma$ e

$$\nabla^2_{xx} \mathcal{L}(x, \mu, \lambda, \gamma) = \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla^2 g_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla^2 h_i(x). \tag{3}$$

A partir da função Lagrangiano, a M-estacionaridade é definida como segue.

Definição 1 ([9, Definição 2.1]). *Seja $\bar{x}$ um ponto viável para (1). Então dizemos que $\bar{x}$ é um ponto **M-estacionário** se existir um vetor $(\mu, \lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\nabla_x \mathcal{L}(\bar{x}, \mu, \lambda, \gamma) = 0, \tag{4a}$$

$$\mu^T g(\bar{x}) = 0, \tag{4b}$$

$$\gamma * \bar{x} = 0. \tag{4c}$$

Os minimizadores locais de (1) são pontos M-estacionários sob CQs pouco exigentes adaptadas ao MPCaC. Ver, por exemplo, [8, Teoremas 3.2 e 4.7]. A relação entre pontos M-estacionários e pontos KKT de (2) é a seguinte: se $\bar{x}$ é M-estacionário, então tomando $\bar{y}_i = 1$ para $i \in I_0(\bar{x})$ e $\bar{y}_i = 0$ caso contrário, o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ é KKT para (2) [7, Proposição 2.3]. Portanto, a M-estacionariedade pode ser considerada o conceito de estacionariedade de primeira ordem mais forte para (1). Por isso, trabalhamos para obter um conceito de estacionariedade de segunda ordem (necessário) para (1) a partir da M-estacionariedade, que não use a variável auxiliar y.

2.2 Uma Linearização Adequada do Conjunto Viável

Em PNL, as condições de segunda ordem requerem a semidefinitividade positiva da hessiana da função Lagrangiano sobre o conjunto de direções não ascendentes (o cone crítico). Vamos considerar o conjunto factível de (1), $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0,\ h(x) = 0,\ \|x\|_0 \leq \alpha\}$. O *cone tangente* a Ω em $\bar{x} \in \Omega$ é o conjunto:

$$\mathcal{T}(\bar{x}) = \left\{d \in \mathbb{R}^n \mid \exists (x^k) \subset \Omega, \{t_k\} \subset \mathbb{R}_+ \text{ com } t_k \to 0 \text{ e } (x^k - \bar{x})/t_k \to d\right\}.$$

[6]em que μ_j é o multiplicador de Lagrange associado a j-ésima restrição de desigualdade

 © 2023 SBMAC

Um outro cone associado à Ω é definido pelo problema relaxado expresso em (2). O desafio principal na linearização do conjunto factível, assim como para problemas com restrições de complementaridade (MPCC[7]), é a restrição $x * y = 0$, que tem uma natureza combinatória quando $\|x\|_0 < \alpha$. Dependendo da escolha de y, diferentes faces do conjunto factível são descritas por essa expressão. Em [4], foi mostrado que a união dessas faces é baseada na seguinte linearização:

$$\mathcal{T}_{\text{lin}}^{BS}(\bar{x}) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0, \, i \in I_g(\bar{x}), \\ \nabla h(\bar{x})^T d = 0, \\ |I_0(\bar{x}) \cap I_0(d)| \geq n - \alpha \end{array} \right\}.$$

Comentário 2.1 ([9, Comentário 2.1]). *Assim como em PNL, temos que $\mathcal{T}(\bar{x}) \not\supset \mathcal{T}_{\text{lin}}^{BS}(\bar{x})$ em geral. Por exemplo, considere as restrições $-x_1^3 + x_2 \leq 0$, $-x_2 \leq 0$, $\|x\|_0 \leq 1$, o ponto $\bar{x} = (0,0)$, e $d = (-1,0)$. Note que $d \in \mathbb{R} \times \{0\} = \mathcal{T}_{lin}^{BS}(\bar{x})$, mas $d \notin \mathcal{T}(\bar{x})$. Na verdade, toda sequência $\{x^k\}$ dentro de Ω deve satisfazer $(x_1^k)^3 \geq x_2^k \geq 0$ e, portanto, $x_1^k/t_k \geq 0$, o que significa que $(x^k - \bar{x})/t_k \to d$ não ocorre.*

Em 2018 foi apresentada uma condição de otimalidade de segunda ordem para direções críticas baseadas em S-estacionaridade (consultar definição e condição em [4]). No entanto, até onde sabemos, essa condição não é válida se S-estacionaridade for trocada por M-estacionaridade. Veja o Exemplo 3.1 e sua discussão relacionada. Para estabelecer uma condição de otimalidade de segunda ordem associada a M-estacionaridade, propomos o seguinte cone linearizado:

$$\mathcal{T}_{\text{lin}}(\bar{x}) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0, \, i \in I_g(\bar{x}), \\ \nabla h(\bar{x})^T d = 0, \\ d_i = 0, \, i \in I_0(\bar{x}) \end{array} \right\}.$$

É claro que $\mathcal{T}_{\text{lin}}(\bar{x}) \subset \mathcal{T}_{\text{lin}}^{BS}(\bar{x})$, mas a inclusão contrária não é verdadeira em geral. Na verdade, não temos nem mesmo $\mathcal{T}(\bar{x}) \subset \mathcal{T}_{\text{lin}}(\bar{x})$ em geral [9, Exemplo 2.1]. A única diferença entre esses conjuntos linearizados está nas componentes nulas das direções: em $\mathcal{T}_{\text{lin}}(\bar{x})$, d_i deve ser nulo sempre que $x_i = 0$, enquanto em $\mathcal{T}_{\text{lin}}^{BS}(\bar{x})$ algumas das componentes podem ser diferentes de zero. Veja a Figura 1, retirada de [9, Figura 1].

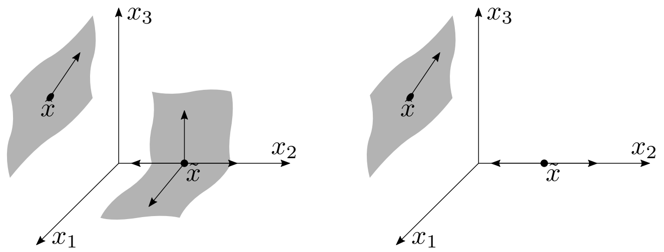

Figura 1: Representação de $\mathcal{T}_{\text{lin}}^{BS}(x)$ (figura à esquerda) e $\mathcal{T}_{\text{lin}}(x)$ (figura à direita) para $\|x\|_0 \leq \alpha = 2$, $x \in \mathbb{R}^3$. Existem dois pontos: $\hat{x}$ com $\hat{x}_1, \hat{x}_3 \neq 0$, $\hat{x}_2 = 0$; e $\tilde{x}$ com $\tilde{x}_2 \neq 0$, $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_3 = 0$. Em $\hat{x}$, $\|\hat{x}\|_0 = 1 = n - \alpha$, ambos os conjuntos linearizados são compostos por direções d com $d_2 = 0$; assim, eles coincidem (veja [9, Teorema 2.1]). Em $\tilde{x}$, o conjunto maior $\mathcal{T}_{\text{lin}}^{BS}(x)$ abrange direções com *pelo menos* uma componente d_1 ou d_3 igual zero, enquanto $\mathcal{T}_{\text{lin}}(x)$ requer *ambas* d_1 e d_3 nulas.

2.3 Condições de Otimalidade de 2ª Ordem: Forte e Fraca

Usando $\mathcal{T}_{\text{lin}}(\bar{x})$, somos capazes de definir nossa condição necessária forte de otimalidade de segunda ordem que não depende da variável auxiliar y. Isso está em conformidade com a M-estacionariedade (Definição 1).

[7] *Mathematical Programs with Complementarity Constraints*

Definição 2 ([9, Definição 2.2])**.** *Seja $\bar{x}$ um ponto M-estacionário de* (1)*. Dizemos que $\bar{x}$ satisfaz a condição necessária de otimalidade de segunda ordem forte (MPCaC-SSONC [8]) se existir um vetor multiplicador $(\mu, \lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ associado a $\bar{x}$ tal que*

$$d^T \nabla^2_{xx} \mathcal{L}(\bar{x}, \mu, \lambda, \gamma) d \geq 0 \quad \textit{para todo} \quad d \in \mathcal{C}^S(\bar{x}),$$

em que $\mathcal{C}^S(\bar{x})$ é o ***cone crítico forte de MPCaC*** *definido como*

$$\mathcal{C}^S(\bar{x}) = \{d \in \mathcal{T}_{\text{lin}}(\bar{x}) \mid \nabla f(\bar{x})^T d \leq 0\}.$$

Comentário 2.2 ([9, Comentário 2.2])**.** *Se $\bar{x}$ é M-estacionário, então:*

$$\mathcal{C}^S(\bar{x}) = \left\{d \in \mathcal{T}_{\text{lin}}(\bar{x}) \mid \nabla g_i(\bar{x})^T d = 0,\ i \in I_g^+(\bar{x})\right\}. \tag{5}$$

É bem conhecido no campo da PNL que a condição necessária de segunda ordem forte não pode ser esperada nos pontos limite de algoritmos práticos [3]. Em vez disso, o conceito adequado neste contexto é a condição necessária de segunda ordem fraca, que consiste em relaxar os requisitos em relação a ∇g em (5). Derivamos uma condição de otimalidade necessária de segunda ordem fraca adaptada ao MPCaC (MPCaC-WSONC[9]), que substitui o cone crítico forte $\mathcal{C}^S(\bar{x})$ na Definição 2, por um conjunto menor $\mathcal{C}^W(\bar{x}) \subset \mathcal{C}^S(\bar{x})$ chamado cone crítico fraco e definido como

$$\mathcal{C}^W(\bar{x}) = \left\{d \in \mathcal{T}_{\text{lin}}(\bar{x}) \mid \nabla g_i(\bar{x})^T d = 0,\ i \in I_g(\bar{x})\right\}. \tag{6}$$

2.4 Condições de Qualificação das Restrições

No caso do MPCaC, assim como no MPCC, é necessário discutir as condições de qualificação das restrições para satisfazer os conceitos de primeira e segunda ordem nos minimizadores. A abordagem comum para definir essas condições é exigir uma condição de qualificação padrão no *problema não linear apertado* (TNLP[10]$(\bar{x})$).

$$\begin{array}{rll} \text{minimizar} & f(x) & \\ \text{sujeito a} & g(x) \leq 0, & h(x) = 0, \\ & x_i = 0, & i \in I_0(\bar{x}). \end{array} \tag{7}$$

Usando essa estratégia, várias CQs padrão foram adaptadas para MPCaC, garantindo M-estacionariedade (consulte [6]). Além disso, observe que a M-estacionariedade para $\bar{x}$ é exatamente a condição KKT para TNLP$(\bar{x})$, e $\mathcal{T}_{\text{lin}}(\bar{x})$ é apenas o cone linearizado padrão de (7).

Em PNL padrão, as CQs mencionadas em [6] atestam a otimalidade de segunda ordem nos minimizadores locais. Outra CQ com essa propriedade é a *CQ posto constante relaxado* (RCRCQ[11]), definida em [10]. Essa condição relaxa os requisitos em CRCQ[12] sobre as restrições de igualdade. A seguir, definimos sua correspondente ao MPCaC impondo a condição RCRCQ em TNLP$(\bar{x})$.

Definição 3 ([9, Definição 2.3])**.** *Dizemos que um ponto $\bar{x} \in \Omega$ está em conformidade com a condição de qualificação de restrição de independência linear de MPCaC (MPCaC-LICQ[13]) se os gradientes*

$$\nabla g_i(\bar{x}),\ i \in I_g(\bar{x}), \quad \nabla h_j(\bar{x}),\ j = 1, \ldots, p, \quad e_i,\ i \in I_0(\bar{x}),$$

em que e_i é o i-ésimo vetor canônico, são linearmente independentes.

[8] *Strong Second-Order Necessary Conditions*
[9] *Weak Second-Order Necessary Conditions*
[10] *Tightened NonLinear Problem*
[11] *Relaxed Constant Rank Constraint Qualification*
[12] *Constant Rank Constraint Qualification*
[13] *Linear Independence Constraint Qualification*

 © 2023 SBMAC

Definição 4 ([9, Definição 2.5]). *Dizemos que a condição de qualificação de restrição de posto constante relaxado de MPCaC (MPCaC-RCRCQ) é válida em um ponto viável $\bar{x} \in \Omega$ se existe uma vizinhança $N(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que para todo $\mathcal{I} \subset I_g(\bar{x})$, a família de gradientes*

$$\nabla g_i(x),\ i \in \mathcal{I}, \quad \nabla h_j(x),\ j \in \{1, \dots, p\}, \quad e_i,\ i \in I_0(\bar{x})$$

tem o mesmo posto para todo $x \in N(\bar{x})$.

MPCaC-RCRCQ é estritamente implicado por MPCaC-CRCQ mesmo na ausência de restrições de igualdade $h(x) = 0$, devido à diferença relacionada aos vetores canônicos e_i. O próximo exemplo ilustra isso com uma situação interessante.

Exemplo 2.1 ([9, Exemplo 2.2]). *Para quaisquer restrições $g(x) \leq 0$, $h(x) = 0$, $\|x\|_0 \leq \alpha$ para as quais $\bar{x} = 0$ é viável, MPCaC-RCRCQ é válida em $\bar{x}$. Isso ocorre porque e_i, $i \in I_0(\bar{x})$, formam a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Por outro lado, MPCaC-CRCQ não necessariamente é válida em $\bar{x}$, por exemplo, $g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 \leq 0$ e $\|x\|_0 \leq 1$. Pois, as condições para CRCQ não são válidas em $\bar{x}$ quando $\mathcal{I} = \{1\}$ e $\mathcal{I}_0 = \{2\}$.* □

3 Validade de MPCaC-W/SSONC em Minimizadores e Relações com Estacionaridade Padrão de Segunda Ordem

Similarmente a PNL padrão [1, 2], MPCaC-RCRCQ é uma CQ para a estacionariedade forte de segunda ordem, como enunciamos a seguir:

Teorema 3.1 ([9, Teorema 2.4]). *Seja x^* um minimizador local de (1) e suponha que MPCaC-RCRCQ é satisfeita em x^*. Então, x^* é M-estacionário e, para qualquer vetor multiplicador associado (μ, λ, γ), x^* satisfaz a condição MPCaC-SSONC, isto é,*

$$d^T \nabla^2_{xx} \mathcal{L}(x^*, \mu, \lambda, \gamma) d \geq 0$$

para todo $d \in \mathcal{C}^S(x^*)$, onde $\mathcal{C}^S(x^*)$ é o cone crítico forte MPCaC, definido em (5).

Comentário 3.1. *Queremos ressaltar que além da nossa condição não utilizar a variável auxiliar y, ela também é a mais adequada para MPCaC, uma vez que o nosso cone linearizado é de fato mais adequado para definir condições de segunda ordem e no exemplo a seguir isso fica mais claro.*

Exemplo 3.1 ([9, Exemplo 2.3]). *Consideremos o problema tridimensional*

$$\text{minimizar} \quad \tfrac{1}{2}\left[(x_1 - 1)^2 - x_2^2 - x_3^2\right] \text{ sujeito a } \ x_2 - x_3^3 = 0, \|x\|_0 \leq 2.$$

O ponto viável $\bar{x} = (1, 0, 0)$ é um minimizador local isolado, uma vez que $(1, t^3, t)$, $t \neq 0$, não é viável. É claro que MPCaC-RCRCQ é válida em $\bar{x}$, e assim $\bar{x}$ é M-estacionário com multiplicadores λ e $\gamma = (0, -\lambda, 0)$ (veja a Definição 1). Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\nabla^2_{xx} \mathcal{L}(\bar{x}, \lambda, \gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad \mathcal{C}^{BS}(\bar{x}) = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R},$$

em que $\mathcal{C}^{BS}$ é cone crítico construído a partir da linearização $\mathcal{T}^{BS}_{\text{lin}}$. Tomando $d = (0, 0, 1) \in \mathcal{C}^{BS}(\bar{x})$, temos $d^T \nabla^2_{xx} \mathcal{L}(\bar{x}, \lambda, \gamma) d = -1 < 0$. Por outro lado, $\mathcal{C}^W(\bar{x}) = \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$ e assim MPCaC-WSONC é válida em $\bar{x}$.

E um último resultado muito importante que obtivemos está enunciado a seguir:

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0113

© 2023 SBMAC

Teorema 3.2 ([9, Teorema 4.2]). *Seja $\bar{x}$ um ponto factível para* (1) *e defina $\bar{y}$ colocando $\bar{y}_i = 1$ se $i \in I_0(\bar{x})$ e $\bar{y}_i = 0$ caso contrário. Então $\bar{x}$ é um ponto MPCaC- WSONC se, e somente se, $(\bar{x}, \bar{y})$ satisfaz a WSONC padrão para* (2).

O Teorema 3.2 afirma que a MPCaC-WSONC é equivalente à WSONC para o Problema Reformulado (2). No entanto, o cone crítico de PNL padrão $\mathcal{C}^W_{\mathrm{PNL}}$ é inconsistente em alguns casos, enquanto a MPCaC-WSONC funciona apenas com a variável original x. Assim, a MPCaC-WSONC é para WSONC o que a M-estacionariedade é para KKT. O exemplo a seguir ilustra uma situação em que a WSONC padrão falha.

Exemplo 3.2 ([9, Exemplo 4.1]). *Considerando o problema tridimensional de minimização de $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ sujeito a $\|x\|_0 \leq 2$, para o qual $\bar{x} = (0, 0, 0)$ é a solução global. Seu problema reformulado é*

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{sujeito a} & 3 - y_1 - y_2 - y_3 \leq 2, \quad y \leq e, \quad x_i y_i = 0, \ i = 1, 2, 3. \end{array}$$

É fácil verificar que $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0, 0, 0, 3/4, 3/4)$ é KKT para o problema acima com multiplicadores $\mu^e = 0$, $\mu^y = (0, 0, 0)$ e qualquer $\lambda^c \in \mathbb{R} \times 0^2$. Ao verificar o termo quadrático computado com a hessiana conseguimos reduzir à seguinte expressão:

$$2\|d^x\|_2^2 + 2\lambda_1^c d_1^x d_1^y. \tag{8}$$

Observe que para $(d^x, d^y) = (1, 0, 0, 1, 0, 0) \in \mathcal{C}^W_{PNL}(\bar{x}, \bar{y})$ e $\lambda^c = (-2, 0, 0)$, a expressão (8) *é negativa.* □

No Exemplo 3.2, a solução $\bar{x} = (0, 0, 0)$ satisfaz a qualificação de restrição mais rigorosa MPCaC-LICQ. Além disso, ela satisfaz a estacionariedade de segunda ordem em ambos os sentidos MPCaC-WSONC e WSONC padrão; de fato, ela está em conformidade com WSONC tomando $\lambda^c = (0, 0, 0)$ e $\bar{y}_i > 0$ para $i = 1, 2, 3$ (por exemplo, $\bar{y} = (1, 1, 1)$). No entanto, se um algoritmo obtém $\bar{x} = \bar{y} = 0$, pode falhar em declarar a convergência usando a otimalidade de segunda ordem padrão. Portanto, estabelecer a convergência usando MPCaC-WSONC é mais apropriado.

4 Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos um estudo sobre condições de otimalidade de segunda ordem e qualificações de restrições para problemas com restrições de cardinalidade (MPCaC), e propomos duas novas condições adaptadas, MPCaC-SSONC e MPCaC-WSONC, e uma qualificação de restrição, MPCaC-RCRCQ, baseada na RCRCQ [10]. Comparamos a MPCaC-WSONC com a WSONC usual e mostramos que a primeira exclui problemas oriundos da variável artificial y. No artigo completo, um algoritmo primal (seguro) de Lagrangiano aumentado foi considerado e sua convergência global para pontos de segunda ordem foi estabelecida e também provamos que, além de pontos M-estacionários, o algoritmo alcança pontos MPCaC-WSONC. Até onde sabemos, esta é a primeira vez que a convergência até a estacionariedade de segunda ordem foi estabelecida para um algoritmo aplicado a MPCaC.

Agradecimentos

O quarto autor foi apoiado financeiramente pelo CNPq (Projeto 309136/2021-0). Gostaríamos de agradecer aos dois revisores anônimos por suas sugestões.

 © 2023 SBMAC

Referências

[1] Roberto Andreani, C. E. Echagüe e M. L. Schuverdt. "Constant-Rank Condition and Second-Order Constraint Qualification". Em: **Journal of Optimization Theory and Applications** 146.2 (2010), pp. 255–266. DOI: 10.1007/s10957-010-9671-8.

[2] Roberto Andreani, Gabriel Haeser, María Laura Schuverdt e Paulo José da Silva e Silva. "A relaxed constant positive linear dependence constraint qualification and applications". Em: **Mathematical Programming** 135.1 (2012), pp. 255–273. DOI: 10.1007/s10107-011-0456-0.

[3] Roberto Andreani e Leonardo Delarmelina Secchin. "A Note on the Convergence of an Augmented Lagrangian Algorithm to Second-Order Stationary Points". Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. Vol. 6. 1. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2018. DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0303.

[4] Max Bucher e Alexandra Schwartz. "Second-Order Optimality Conditions and Improved Convergence Results for Regularization Methods for Cardinality-Constrained Optimization Problems". Em: **Journal of Optimization Theory and Applications** 178.2 (ago. de 2018), pp. 383–410. DOI: 10.1007/s10957-018-1320-7.

[5] Oleg P. Burdakov, Christian Kanzow e Alexandra Schwartz. "Mathematical Programs with Cardinality Constraints: reformulation by Complementarity-Type Conditions and a Regularization Method". Em: **SIAM Journal on Optimization** 26.1 (2016), pp. 397–425. DOI: 10.1137/140978077.

[6] Michal Červinka, Christian Kanzow e Alexandra Schwartz. "Constraint qualifications and optimality conditions for optimization problems with cardinality constraints". Em: **Mathematical Programming** 160.1 (2016), pp. 353–377. DOI: 10.1007/s10107-016-0986-6.

[7] Christian Kanzow, Andreas B. Raharja e Alexandra Schwartz. "An Augmented Lagrangian Method for Cardinality-Constrained Optimization Problems". Em: **Journal of Optimization Theory and Applications** 189.3 (2021), pp. 793–813. DOI: 10.1007/s10957-021-01854-7.

[8] Christian Kanzow, Andreas B. Raharja e Alexandra Schwartz. "Sequential optimality conditions for cardinality-constrained optimization problems with applications". Em: **Computational Optimization and Applications** 80.1 (2021), pp. 185–211. DOI: 10.1007/s10589-021-00298-z.

[9] Jean Carlos Medeiros, Ademir Alves Ribeiro, Mael Sachine e Leonardo Delarmelina Secchin. "A practical second-order optimality condition for cardinality-constrained problems with application to an augmented Lagrangian method". 2022. DOI: https://optimization-online.org/?p=18880.

[10] Leonid Minchenko e Sergey Stakhovski. "On relaxed constant rank regularity condition in mathematical programming". Em: **Optimization** 60.4 (2011), pp. 429–440. DOI: 10.1080/02331930902971377.

[11] Andreas M. Tillmann, Daniel Bienstock, Andrea Lodi e Alexandra Schwartz. "Cardinality Minimization, Constraints, and Regularization: A Survey". Em: (jun. de 2021). arXiv: 2106.09606 [math.OC].

 © 2023 SBMAC