Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Sobre um novo índice de desempenho tipo H_2 para sistemas lineares com saltos markovianos a tempo discreto e cadeia de Markov escondida

Junior R. Ribeiro[1] Luiz H. Romero[2] Eduardo F. Costa[3]
[1 2 3]USP, São Carlos, SP

Resumo. Neste trabalho, abordamos a norma H_{2rti} recentemente introduzida para sistemas lineares com saltos Markovianos a tempo discreto, através de um levantamento estatístico sob a forma de *performance profile*, ou perfil de desempenho. Comparamos duas soluções sintetizadas via desigualdades lineares matriciais para o problema de controle nesta classe de sistemas, com observação parcial da cadeia de Markov via detector, para o clássico problema H_2 e para o novo índice de *performance* H_{2rti} baseado em impulso em tempo aleatório. Instâncias aleatórias foram geradas e os perfis são semelhantes para cadeias ergódicas e apontam uma clara superioridade do H_{2rti} para cadeias periódicas.

Palavras-chave. Sistemas lineares com saltos Markovianos, cadeia de Markov escondida, norma H_2, sistemas lineares estocásticos.

1 Introdução

Os sistemas de controle são importantes para a sociedade, podendo ser encontrados na indústria, nas casas, nos veículos e em diversas aplicações. Entre os diversos requisitos de um sistema de controle, é essencial a criação de mecanismos que possibilitem que o sistema continue a operar de forma segura ante falhas e mudanças abruptas em suas estruturas internas. Nesse contexto, os Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (SLSM, ou no inglês, *Markov Jump Linear Systems - MJLS*) destacam-se e têm sido um tema de pesquisa muito ativo nas últimas décadas, com diversos resultados na literatura [1–3, 5, 7–9].

Os SLSM constituem uma classe de sistemas dinâmicos lineares estocásticos, com um conjunto finito $\mathbf{M}$ de *modos de operação*, que são modelos para cada uma de suas dinâmicas internas. Estes modos são representados por uma cadeia de Markov (aqui denotada por θ). No contexto deste trabalho, trataremos dos SLSM a tempo discreto, onde a cada instante de tempo $k \geq 0$ o sistema está atuando com uma dinâmica específica de $\mathbf{M}$. No entanto, no próximo instante $k+1$ a dinâmica interna pode "saltar" de $\theta(k) = i$ para $\theta(k+1) = j$, $j \neq i$, aleatoriamente, de acordo com a cadeia de Markov.

Uma dificuldade bastante comum na implementação dos SLSM é quanto à observação dos modos do sistema. A observação perfeita (sem erros) da cadeia é inviável ou dificultada em várias aplicações do mundo real, e assim torna-se importante uma abordagem sem a observação da cadeia ou, pelo menos, com observação indireta ou imperfeita. No presente trabalho, a cadeia de Markov não é observada diretamente, mas por meio de um detector (aqui denotado por η), que é um processo estocástico ligado à cadeia e que é observado. Esse cenário de observação é comumente chamado de cadeia de Markov escondida ou simplesmente detector (*hidden Markov chain*

[1]j5rodrib@gmail.com
[2]neoluizz@gmail.com
[3]efcosta@icmc.usp.br

ou *detector approach*). Assim, a cada instante, a cadeia no estado $\theta(k) = i$ excitará uma saída do detector $\eta(k) = \ell$ com uma determinada probabilidade $q_{i\ell}$.

Uma política de controle $\{u(k), k \geq 0\}$ pode ser avaliada sob diferentes índices de *performance*, um dos quais é amplamente conhecido como "norma H_2". Este índice, a grosso modo, avalia o quão rápido a política faz o sistema convergir para um ponto de equilíbrio, que normalmente é o zero. Mais especificamente, com o sistema em equilíbrio (em zero) é aplicado um impulso unitário no tempo $k = 0$ para perturbá-lo, e então é medido como a norma da saída do sistema responde ao impulso ao longo do tempo, dando-nos uma medida de desempenho da política escolhida, conforme a norma convirja mais ou menos rapidamente para zero. Já existe uma solução via Desigualdades Lineares Matriciais (*Linear Matrix Inequalities–LMIs*) bastante conhecida referente ao índice H_2, apresentada no *Theorem 3* de [7] (e reproduzida aqui, no Teorema 3.1, por conveniência).

Ocorre que a norma H_2 não é invariante no tempo, de forma que, se o impulso for aplicado em diferentes instantes, teremos diferentes valores de norma H_2, vide [6]; nesse artigo, motivado por esta questão da variância no tempo da norma H_2, os autores trazem um novo índice de *performance* chamado $\mathrm{H}_{2\mathrm{rti}}$ (*H_2 with random-time impulse* – H_2 com impulso em tempo aleatório), que é um índice baseado no H_2, mas invariante no tempo.

No presente artigo, trazemos uma comparação entre os desempenhos das políticas de controle calculadas com ambos os índices H_2 (utilizando as LMIs do *Theorem 3* de [7]) e $\mathrm{H}_{2\mathrm{rti}}$ (utilizando as LMIs do *Theorem 3* de [6]), em termos da norma da saída como resposta a perturbações gaussianas e perturbações do tipo "zero-um", em quatro intervalos de tempo entre $k = 500$ e $k = 4000$, como explicado na Seção 4.

Geramos dois grupos de instâncias aleatórias, um com cadeias de Markov ergódicas e outro com cadeias periódicas. Os resultados obtidos apontam clara superioridade da solução obtida com o índice $\mathrm{H}_{2\mathrm{rti}}$ para cadeias periódicas; para cadeias ergódicas o desempenho das soluções de ambos os índices são semelhantes.

2 Notações e definições

Neste artigo, as configurações são como em [6, 7]. Consideramos o espaço de probabilidade fundamental $(\Omega, \mathcal{P}, \mathfrak{F})$, munido do operador esperança $\mathbb{E}(\cdot)$ e esperança condicional $\mathbb{E}(\cdot\,|\,\cdot)$. O espaço de estados da cadeia de Markov θ é $\mathbf{M} = \{1, ..., N\}$, com $\theta = \{\theta(k) \in \mathbf{M}, k \geq 0\}$, e o espaço de estados do detector η é $\mathbf{D} = \{1, ..., N_d\}$, com $\eta = \{\eta(k) \in \mathbf{D}, k \geq 0\}$. Assumimos que, para todo $i, j \in \mathbf{M}, \ell \in \mathbf{D}$,

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\theta(k+1) = j \mid \theta(k) = i) = p_{ij}, \quad \mathcal{P}(\theta(k) = i) = \pi_i(k), \\ \qquad \mathcal{P}(\eta(k) = \ell \mid \theta(k) = i) = q_{i\ell}. \end{cases} \tag{1}$$

Ainda, escrevemos $\mathbf{D}_i = \{\ell \in \mathbf{D} : q_{i\ell} > 0\}$ o conjunto das saídas ℓ excitadas por i. Abaixo, o SLSM em estudo é denotado por Φ.

$$\Phi : \begin{cases} x(k+1) = A_{\theta(k)} x(k) + B_{\theta(k)} u(k) + E_{\theta(k)} w(k), \\ \qquad y(k) = C_{\theta(k)} x(k) + D_{\theta(k)} u(k), \\ \qquad \theta(0) \sim \pi(0),\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Os parâmetros do SLSM são as matrizes reais conhecidas A_i, B_i, E_i, C_i, D_i de dimensões $n \times n, n \times n_u, n \times n_w, n_y \times n$ e $n_y \times n_u$ respectivamente, para todo $i \in \mathbf{M}$. Os processos $\{x(k)\}$, $\{u(k)\}$, $\{w(k)\}$ e $\{y(k)\}$ são respectivamente o *componente contínuo do estado*[4] do sistema, o *controle*,

[4] O estado do sistema no instante k é dado pelo par $(x(k), \theta(k))$, em que o componente $x(k)$ pertence a $\mathbb{R}^n$, espaço contínuo, e $\theta(k)$ pertence a $\mathbf{M}$, espaço discreto.

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0100

a *entrada exógena* e a *saída*. A distribuição inicial $\pi(0)$ é dada. Nesse modelo, assumimos uma política de controle de realimentação de estado na forma

$$u(k) = K_{\eta(k)} x(k), \tag{3}$$

em que as matrizes reais $K = \{K_\ell \in \mathbb{R}^{n_u \times n}, \ell \in \mathbf{D}\}$ são chamadas *ganhos do controle*.

Para cada $j \in \mathbf{M}$ e um conjunto de matrizes reais $V = \{V_{i\ell} \in \mathbb{R}^{n\times n} : i \in \mathbf{M}, \ell \in \mathbf{D}\}$, definimos os operadores

$$\mathcal{D}_j(V) = \sum_{i\in\mathbf{M}} \sum_{\ell\in\mathbf{D}_i} p_{ij} q_{i\ell} V_{i\ell}.$$

Considere e_j sendo o j-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^{n_w}$, $\tau \geq 0$ inteiro fixado, e o processo estocástico $\mathbf{e}_\tau = \{\mathbf{e}_\tau(k), k \geq 0\}$ satisfazendo $\mathcal{P}(\mathbf{e}_\tau(\tau) = e_j) = 1/n_w$ para cada $j = 1, ..., n_w$, e $\mathcal{P}(\mathbf{e}_\tau(k) = 0) = 1$ para todo $k \geq 0$, $k \neq \tau$. As seguintes definições são adaptadas de [6].

Definição 2.1. *A norma H_2 associada ao sistema Φ, denotada por $\|\Phi\|_2$, é definida por*

$$\|\Phi\|_2^2 = n_w \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\big(\|y(k)\|^2 \mid w(k) = \mathbf{e}_0(k)\big)\Big). \tag{4}$$

Vale a pena mencionar que os autores em [6] escrevem uma definição diferente da clássica para o índice H_2, facilitando a notação e os cálculos. Nessa modificação, o impulso unitário foi substituído pelo processo estocástico $\mathbf{e}_\tau$, com $\tau = 0$. No *Remark 1* do artigo, eles mostram a equivalência das duas definições, simplesmente usando o teorema de probabilidade total.

Definição 2.2. *A norma H_{2rti} associada ao sistema Φ, denotada por $\|\Phi\|_{2rti}$, é definida por*

$$\|\Phi\|_{2rti}^2 = \lim_{\tau\to\infty} n_w \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\big(\|y(k)\|^2 \mid w(k) = \mathbf{e}_{T_\tau}(k)\big)\Big), \tag{5}$$

em que T_τ é uma variável aleatória uniforme discreta no conjunto $\{0, 1, ..., \tau - 1\}$.

3 Soluções para $\mathbf{H}_2$ e $\mathbf{H}_{2rti}$

Para sintetizar o ganho K, precisamos resolver um problema de LMIs, que dispomos a seguir. Vamos escrever as soluções para o problema no próximo teorema, cuja prova pode ser encontrada em [6]. Considere a função objetivo dada por

$$f_O = \sum_{i\in\mathbf{M}} \sum_{\ell\in\mathbf{D}_i} q_{i\ell} \operatorname{tr}(W_{i\ell}),$$

em que $\operatorname{tr}(\cdot)$ representa o traço de matriz. O problema de otimização é

$$\begin{aligned} &\min_{R_{i\ell}, W_{i\ell}, G_\ell, F_\ell} f_O \\ &\text{sujeito a } \begin{bmatrix} R_{i\ell} - \mu_i E_i E_i' & A_i G_\ell + B_i F_\ell \\ (A_i G_\ell + B_i F_\ell)' & G_\ell + G_\ell' - \mathcal{D}_i(R) \end{bmatrix} > 0, \\ &\qquad\qquad \begin{bmatrix} W_{i\ell} & C_i G_\ell + D_i F_\ell \\ (C_i G_\ell + D_i F_\ell)' & G_\ell + G_\ell' - \mathcal{D}_i(R) \end{bmatrix} \geq 0, \end{aligned} \tag{6}$$

para todo $i \in \mathbf{M}$ e para todo $\ell \in \mathbf{D}_i$, em que $\mu \in [0, 1]^N$ é uma distribuição específica, explicada nos teoremas a seguir.

Teorema 3.1 ([7], *Theorem 3*)**.** *Se $\mu = \pi(0)$, com F_ℓ e G_ℓ no conjunto factível de (6), então os ganhos $K_\ell = F_\ell G_\ell^{-1}$, $\ell \in \mathbf{D}$, levam a $f_O \geq \|\Phi\|_2^2$.*

Teorema 3.2 ([6], *Theorem 3*)**.** *Se $\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{t=0}^{k-1} \pi(t)$, com F_ℓ e G_ℓ no conjunto factível de (6), então os ganhos $K_\ell = F_\ell G_\ell^{-1}$, $\ell \in \mathbf{D}$, levam a $f_O \geq \|\Phi\|_{2rti}^2$.*

Nos Teoremas 3.1 e 3.2, temos que f_O é apenas um limitante superior para $\|\Phi\|_2^2$ e $\|\Phi\|_{2\mathrm{rti}}^2$ em cada caso, de forma a permitir calcular os ganhos K. O valor exato de $\|\Phi\|_2^2$ e $\|\Phi\|_{2\mathrm{rti}}^2$ é calculado via *Proposition 4* de [7] e *Theorem 3* de [6], respectivamente, mas não é o foco neste trabalho.

4 Geração de instâncias e comparação dos índices

Neste trabalho, geramos 500 instâncias aleatórias com cadeia de Markov ergódica e mais 500 com cadeia periódica. Todos os modos, de forma individual, são controláveis e observáveis no sentido clássico [4]. Em cada uma dessas instâncias, calculamos o ganho K conforme os Teoremas 3.1 e 3.2, e aplicamos em (2)-(3) com duas entradas exógenas $\{w(k)\}$. Em um teste, a entrada exógena é gaussiana: $w(k) = [s_1, ..., s_{n_w}]'$, em que $s_j \sim N(0,1)$ são variáveis aleatórias gaussianas para todo $j = 1, ..., n_w$ para todo $k \in \mathcal{S}$, em que $\mathcal{S} = \{500, ..., 999\} \cup \{1500, ..., 1999\} \cup \{2500, ..., 2999\} \cup \{3500, ..., 3999\}$, e para $k \notin \mathcal{S}$, arbitramos $w(k) = 0$. Em outro teste, empregamos o sinal zero-um: $w(k) = [1, ..., 1]'$ para $k \in \mathcal{S}$, caso contrário, $w(k) = [0, ..., 0]'$.

Como os índices H_2 e $\mathrm{H}_{2\mathrm{rti}}$ são diferentes, não faz sentido comparar $\|\Phi\|_2$ com $\|\Phi\|_{2\mathrm{rti}}$. Em vez disso, estimamos $Y = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(\|y(k)\|^2)$ via simulação de Monte Carlo com 8000 repetições para cada instância gerada, com a entrada exógena gaussiana e com a entrada zero-um definidas acima. Denotaremos Y_2 e $Y_{2\mathrm{rti}}$ os valores de Y correspondentes aos índices H_2 e $\mathrm{H}_{2\mathrm{rti}}$ respectivamente.

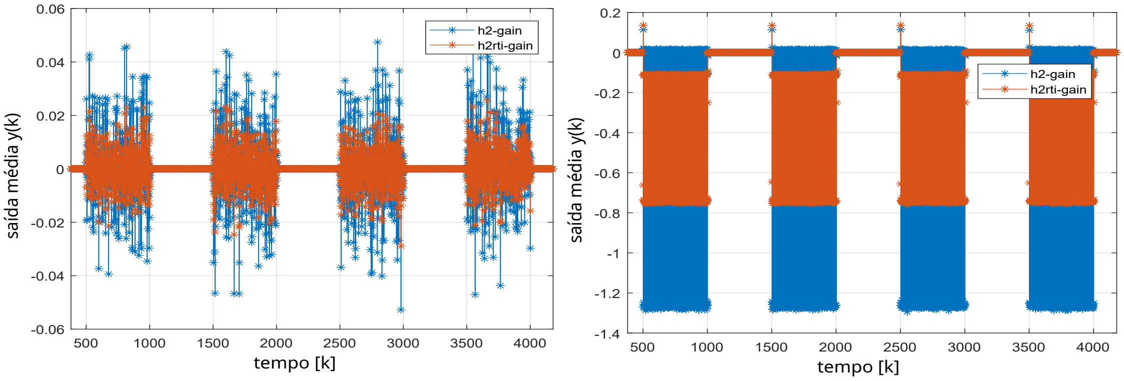
Os resultados obtidos são apresentados como *performance profile* ou perfil de desempenho. Nesse gráfico, o eixo das abscissas é disposto no intervalo $[1, f]$ e o eixo das ordenadas em $[0, 1]$, em que $f > 1$ é uma folga arbitrada. Consideremos o gráfico referente ao índice H_2 e tomemos um ponto (x, y). A ordenada $y \in [0, 1]$ representa o percentual das instâncias em que $Y_2 \leq x \cdot \min(Y_2, Y_{2\mathrm{rti}})$, para $x \in [1, f]$. No caso do índice $\mathrm{H}_{2\mathrm{rti}}$, a ordenada $y \in [0, 1]$ representa o percentual das instâncias em que $Y_{2\mathrm{rti}} \leq x \cdot \min(Y_2, Y_{2\mathrm{rti}})$, para $x \in [1, f]$.

5 Resultados

Foram gerados dois conjuntos de instâncias, um dos quais com cadeia de Markov ergódica e outro com cadeia periódica, cujos resultados diferiram bastante, como veremos nos gráficos adiante. Na figura 1, vemos o exemplo da saída média de uma das instâncias, com $n_y = 1$.

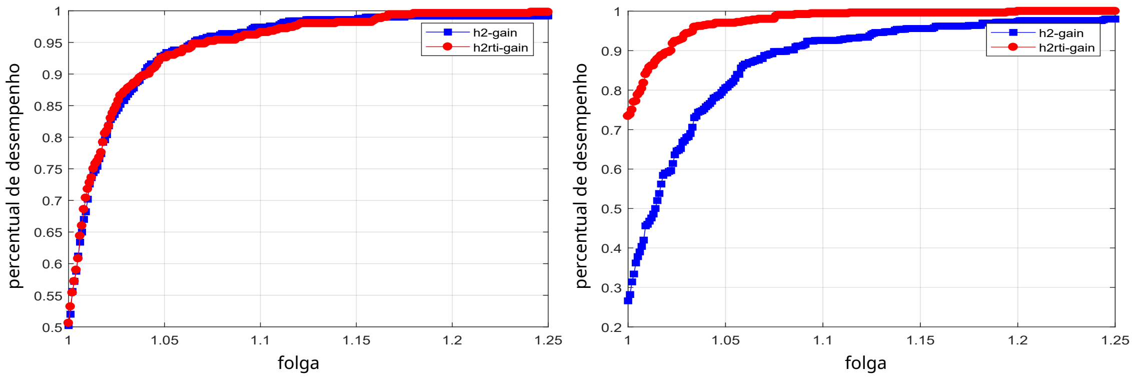
A comparação do desempenho dos ganhos K calculados segundo os Teoremas 3.1 e 3.2 com a entrada gaussiana está representada na Figura 2. Pode-se perceber que ambos os índices têm praticamente o mesmo perfil para instâncias com cadeia ergódica, conforme visto na Figura 2a. Neste perfil, tivemos $Y_{2\mathrm{rti}} \leq Y_2$ em $50,6\%$ das instâncias e $Y_2 \leq Y_{2\mathrm{rti}}$ em $50,2\%$ das instâncias geradas. Por outro lado, para cadeia periódica, vemos a superioridade do índice $\mathrm{H}_{2\mathrm{rti}}$ na Figura 2b. Neste perfil, tivemos $Y_{2\mathrm{rti}} \leq Y_2$ em $73,4\%$ das instâncias e $Y_2 \leq Y_{2\mathrm{rti}}$ em $26,6\%$ das instâncias.

Com o sinal zero-um (Figura 3), os perfis relativos a H_2 e $\mathrm{H}_{2\mathrm{rti}}$ são semelhantes para cadeia ergódica, com resultados melhores com índice H_2 em $53,2\%$ das instâncias geradas, contra $47,6\%$ do $\mathrm{H}_{2\mathrm{rti}}$; vide Figura 3a. Para cadeia periódica, $\mathrm{H}_{2\mathrm{rti}}$ é melhor em $62,2\%$ das instâncias, contra $47,6\%$ do H_2, como se pode observar na Figura 3b.



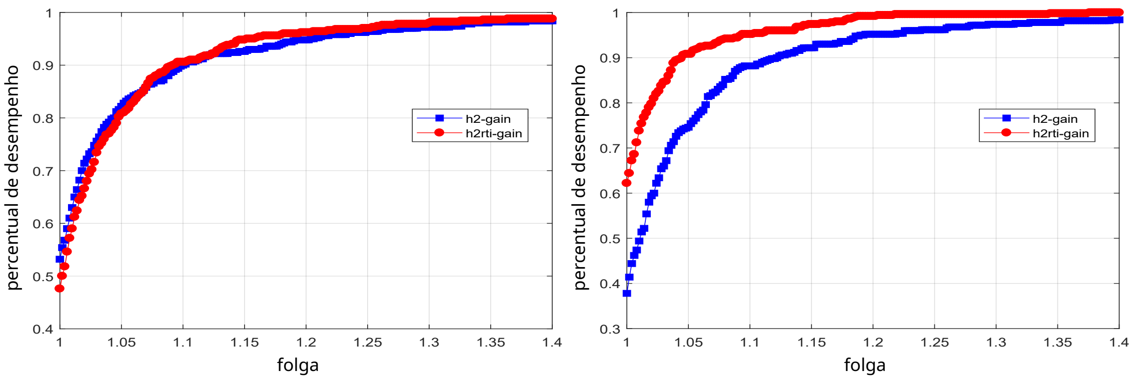
(a) Saída média para sinal aleatório gaussiano. (b) Saída média para sinal determinístico zero-um.

Figura 1: Exemplos de saídas: um sinal gaussiano e um determinístico. Fonte: autoria própria.



(a) Desempenho das soluções com cadeia ergódica. (b) Desempenho das soluções com cadeia periódica.

Figura 2: *Performance profile* para entrada gaussiana comparando as soluções calculadas sob os índices H_2 (marcado com ■) e $H_{2\text{rti}}$ (marcado com ●). Fonte: autoria própria.



(a) Desempenho das soluções com cadeia ergódica. (b) Desempenho das soluções com cadeia periódica.

Figura 3: *Performance profile* para entrada zero-um comparando as soluções calculadas sob os índices H_2 (marcado com ■) e $H_{2\text{rti}}$ (marcado com ●). Fonte: autoria própria.

6 Considerações Finais

Trouxemos uma estatística comparando as soluções para o problema de controle de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos a tempo discreto com observação indireta da cadeia de Markov via detector, onde a solução calculada sob o índice de desempenho clássico H_2 foi confrontada com a solução de um novo índice de desempenho, chamado $\mathrm{H}_{2\mathrm{rti}}$. Foram geradas instâncias aleatórias e observadas suas respostas a um sinal de ruído gaussiano e sinal zero-um, separadas em dois grupos: um grupo de problemas com cadeia ergódica, no qual o desempenho de ambas as soluções foi semelhante para ambas as entradas, e outro grupo com cadeia periódica, onde o índice $\mathrm{H}_{2\mathrm{rti}}$ se mostrou mais eficaz em $73,4\%$ das instâncias com entrada gaussiana e $62,2\%$ com entrada zero-um.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) sob número 316534/2021-8 e CNPq-Universal 421486/2016-3, pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) sob número FAPESP-CEPID 2013/07375-0, e com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

[1] O. L. V. Costa, M. D. Fragoso e R. P. Marques. **Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems**. London: Springer, 2005. DOI: 10.1007/b138575.

[2] Vasile Dragan, Toader Morozan e Adrian-Mihail Stoica. **Mathematical Methods in Robust Control of Discrete-Time Linear Stochastic Systems**. Springer New York, NY, 2009. ISBN: 9781441906298. DOI: 10.1007/978-1-4419-0630-4.

[3] M. Khanbaghi, R. Malhame e M. Perrier. "White water and broke recirculation policies in paper mills via Markovian jump linear quadratic control". Em: **Proceedings of the 1998 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.98CH36207)**. Vol. 2. 1998, 738–743 vol.2. DOI: 10.1109/ACC.1998.703505.

[4] The MathWorks. **State-Space Realizations**. https://www.mathworks.com/help/ident/ug/canonical-state-space-realizations.html. Online; acesso em 30/04/2023. 2013.

[5] A. M. de Oliveira e O. L. V. Costa. "Mixed H_2/H_∞ control of hidden Markov jump systems". Em: **International Journal of Robust and Nonlinear Control** 28.4 (2018), pp. 1261–1280. DOI: 10.1002/rnc.3952.

[6] Luiz H. Romero, Junior R. Ribeiro e Eduardo F. Costa. "On the H2 Control of Hidden Markov Jump Linear Systems". Em: **IEEE Control Systems Letters** 7 (2023), pp. 1315–1320. DOI: 10.1109/LCSYS.2023.3236892.

[7] O. L. do Valle Costa, M. D. Fragoso e M. G. Todorov. "A Detector-Based Approach for the H_2 Control of Markov Jump Linear Systems With Partial Information". Em: **IEEE Transactions on Automatic Control** 60.15 (2015), pp. 1219–1234. DOI: 10.1109/TAC.2014.2366253.

[8] Wei Wang e Chunyan Han. "Optimal filter for discrete-time Markov jump systems with measurement-delays and packet dropouts". Em: **2020 39th Chinese Control Conference (CCC)**. 2020, pp. 991–996. DOI: 10.23919/CCC50068.2020.9188997.

[9] Zheng-Guang Wu et al. "H_2 Performance Analysis and Applications of 2-D Hidden Bernoulli Jump System". Em: **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems** 49.10 (2019), pp. 2097–2107. DOI: 10.1109/TSMC.2017.2745679.

