

Modelagem de um sistema massa-mola usando método de subespaços

Raphaela C. Machado¹, Paloma M. S. R. Rizol², Teófilo M. Souza³

Departamento de Engenharia Elétrica (DEE)/UNESP, Guaratinguetá, SP

David F. C. Zúñiga⁴

Departamento de Engenharia Aeronáutica (DEA)/UNESP, São João da Boa Vista, SP

Airton Nabarrete⁵

Divisão de Engenharia Aeronáutica e Aeroespacial (DEAA)/ITA, São José dos Campos, SP

José M. Balthazar⁶

Departamento de Engenharia Mecânica (DEM)/UNESP, Bauru, SP

Resumo. Este artigo apresenta a identificação em malha aberta de um sistema massa-mola usando método de subespaços. A aplicação de métodos SIM (*Subspace Identification Methods*) para identificação de sistemas dinâmicos no domínio do tempo tem demonstrado ser uma alternativa viável para obtenção de modelos que não necessitam de uma parametrização explícita, a qual, para sistemas multivariáveis, pode ser uma tarefa complexa. Nesse sentido, os resultados obtidos neste trabalho são provenientes de dados experimentais de um sistema massa-mola e os resultados demonstram que o modelo identificado captura bem a dinâmica do sistema.

Palavras-chave. Sistemas Dinâmicos, Sistemas Lineares, Métodos de Subespaços, Identificação em Malha Aberta

1 Introdução

Atualmente, diversos métodos de identificação tem sido desenvolvidos no intuito de não apenas melhorar a qualidade do modelo matemático obtido mas também de diminuir o esforço computacional gasto com esta tarefa. Em [7] é apresentada a identificação de um modelo aeroelástico do X-56A MUTT (*Multi-Utility Technology Testbed*), uma aeronave flexível em subescala da NASA (*National Advisory Committee for Aeronautics*), usando o OEM (*Output Error Method*) [11]. O trabalho apresenta os esforços na tarefa de identificação para determinação das derivadas de estabilidade e controle da aeronave. Além disso, discute alguns aspectos práticos de análises e desafios na área de identificação de aeronaves flexíveis.

Em [6] é apresentada a identificação de uma coluna de um desbutanizador industrial a partir de modelos NLARX (*NonLinear AutoRegressive with eXogenous input*). A planta de destilação é um sistema multivariável altamente complexo, além de ser um problema por natureza mal-condicionado, o que torna a tarefa de identificação ainda mais difícil. Assim, observa-se que é crescente o uso de ferramentas computacionais para auxiliar a tarefa de obtenção de modelos matemáticos de sistemas complexos.

¹raphaela.machado@unesp.br

²paloma.rizol@unesp.br

³teofilo.souza@unesp.br

⁴david.castillo-zuniga@unesp.br

⁵nabarret@ita.br

⁶jose-manoel.balthazar@unesp.br

Seguindo esta perspectiva, nas últimas décadas, mais especificamente a partir do trabalho de [9], uma outra classe de métodos de identificação, conhecida como métodos SIM (*Subspace Identification Methods*), passou a ser explorada e difundida dentro do ambiente acadêmico. Nesse sentido, [10] apresenta a identificação uma planta petroquímica usando diferentes técnicas para obtenção de um modelo dinâmico baseado em dados. Um estudo comparativo entre a identificação por subespaços e a identificação por redes neurais artificiais foi realizado usando dados simulados de um divisor de etileno industrial.

Portanto, neste trabalho será apresentada a identificação de um sistema massa-mola de dois graus de liberdade usando um algoritmo baseado em subespaços, denominado DSR_e , proposto inicialmente por [5]. Uma contribuição relevante deste trabalho consiste na divulgação, no cenário nacional, de técnicas de identificação de sistemas via subespaços, que poderiam ser bem empregadas na modelagem de sistemas mais complexos, como, por exemplo, plantas industriais, as quais possuem muitas entradas e saídas.

Este artigo está organizado conforme a seguir. Na Seção 2 é apresentada a formulação do problema de identificação via subespaços e feita uma breve descrição do algoritmo DSR_e empregado. Na Seção 3 é apresentada uma descrição geral do aparato experimental do sistema massa-mola a ser identificado. Na Seção 4 são apresentados os resultados da identificação do sistema massa-mola. Por fim, na Seção 5 são apresentadas as considerações finais do trabalho.

2 Métodos de identificação por subespaços

De modo geral, métodos de subespaços se referem a uma classe de algoritmos de identificação paramétrica cuja estrutura do modelo obtido comumente está em espaço de estados discreto. Métodos SIM têm como principal característica recuperar as matrizes do sistema a partir de projeções, subespaços vetoriais, dos dados experimentais usados na identificação [15].

O caso mais simples de identificação de sistemas é considerado quando se assume que os dados de entrada e saída não estão contaminados por ruídos. Porém, convém ressaltar que em aplicações reais os sistemas não são excitados apenas pelos sinais de controle. Na prática, ruídos estão presentes nas medições e métodos para o caso de identificação combinada podem produzir estimativas mais confiáveis [15]. Dessa forma, um modelo estocástico é entendido como um modelo representativo da dinâmica do sistema, porém com algum tipo de incerteza também modelada. A natureza da incerteza pode ser, por exemplo, devido a distúrbios agindo sobre o sistema e/ou erros de medição de sensores.

A identificação de sistemas a partir de métodos de subespaços gera modelos na forma de inovação conforme Equação (1) [8].

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k \end{aligned} \quad (1)$$

onde a matriz $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times l}$ é o ganho de Kalman em regime permanente quando N é suficientemente grande e $\boldsymbol{\varepsilon}_k \in \mathbb{R}^{n \times l}$ é um ruído branco de média nula, também conhecido como processo de inovação.

Para a formulação do problema de identificação de sistemas usando métodos SIM, primeiramente é necessário definir um modelo estendido em espaço de estados, o qual será útil para construção das matrizes de projeções dos dados. Assim, substituindo a equação de saída, em termos de $\boldsymbol{\varepsilon}_k$, na Equação (1) de estados, obtém-se o modelo de predição na forma do filtro de Kalman [3]. Desenvolvendo o modelo de predição na forma do filtro de Kalman do instante inicial $k = 0$ até o instante final $N - 1$ e fazendo uso da matriz bloco de Hankel para os dados experimentais

de entrada e saída do sistema, obtém-se o modelo estendido no espaço de estados [14],

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{J/1} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_J^d & \tilde{\mathbf{C}}_J^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{0/J} \\ \mathbf{Y}_{0/J} \end{bmatrix} + (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{D})^J \mathbf{X}_{0/1} \\ \mathbf{Y}_{J/L} &= \tilde{\mathbf{O}}_L \mathbf{X}_{J/1} + \tilde{\mathbf{H}}_L^d \mathbf{U}_{J/L} + \tilde{\mathbf{H}}_L^s \boldsymbol{\varepsilon}_{J/L} \end{aligned} \quad (2)$$

em que J e L são as ordens das matrizes de Hankel dos dados passados e futuros, respectivamente.

2.1 Algoritmo DSR_e

O método DSR_e proposto por [4] e utilizado neste trabalho para identificação do sistema massa-mola, foi implementado em Matlab por [14]. O método DSR_e identifica o processo de inovação diretamente da projeção dos dados experimentais. Este procedimento consiste em separar o resíduo $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ do componente determinístico \mathbf{y}_k^d do sinal de saída \mathbf{y}_k .

A determinação das matrizes do sistema é feita resolvendo o seguinte problema de identificação determinística [14],

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \boldsymbol{\varepsilon}_k \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}_k^d &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (3)$$

em que \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} e \mathbf{K} são os parâmetros a serem identificados, sendo necessário primeiramente definir um novo conjunto de dados, tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &:= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{J/1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{J/1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}_k &:= \mathbf{y}_{J/1}^d \end{aligned} \quad (4)$$

com $k = J, J + 1, J + 2, \dots, N - 1$ sendo $N := N - J$ o número de amostras.

O método N4SID (*Numerical algorithms for Subspace State Space System Identification*) utilizado para resolver o problema de identificação determinística consiste no algoritmo proposto por [12], em que a primeira etapa consiste em obter a projeção oblíqua das saídas futuras nos dados de entrada e saída passados na direção das entradas futuras, a partir de uma decomposição LQ da matriz de dados de entrada e saída. Além disso, é possível obter a Equação (5) que é similar a Equação (2) de saída

$$\mathbf{Y}_{L/L} = \mathbf{R}_{32} \mathbf{R}_{22}^\dagger \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{0/L} \\ \mathbf{Y}_{0/L} \end{bmatrix} + \left(\mathbf{R}_{31} - \mathbf{R}_{32} \mathbf{R}_{22}^\dagger \mathbf{R}_{21} \right) \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{U}_{L/L} \quad (5)$$

onde as matrizes utilizadas na Equação (5) estão definidas em [14].

Por comparação, obtém-se a matriz de projeção $\mathbf{P}_L = \tilde{\mathbf{O}}_L \mathbf{X}_{J/1}$, onde

$$\tilde{\mathbf{O}}_L \mathbf{X}_{J/1} = \mathbf{R}_{32} \mathbf{R}_{22}^\dagger \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{0/L} \\ \mathbf{Y}_{0/L} \end{bmatrix} \quad (6)$$

A partir da decomposição SVD da matriz de projeção obtida, é possível extrair a matriz de observabilidade $\tilde{\mathbf{O}}_L$ e a sequência de estados estimados do sistema $\tilde{\mathbf{X}}_{J/1}$. De posse da sequência de estados estimados, é possível obter as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{K} resolvendo-se o problema de mínimos quadrados, conforme Equação (3) com $\mathbf{x}_{k+1} = \tilde{\mathbf{X}}_{J/1}(1 : m, 2 : nc)$, $\mathbf{x}_k = \tilde{\mathbf{X}}_{J/1}(1 : m, 1 : nc - 1)$ e $\mathbf{u}_k = \mathbf{U}_{L/1}(1 : m, 1 : nc - 1)$.

Resumidamente, os dados de entrada e saída do sistema, \mathbf{U}_{exp} e \mathbf{Y}_{exp} , são fornecidos como entrada para o algoritmo. As matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} e \mathbf{K} são o modelo identificado, que é uma transformação de similaridade do sistema. Os únicos parâmetros de identificação que precisam ser definidos pelo usuário são: o horizonte passado J , o horizonte futuro L e a ordem do modelo n , baseada nos valores singulares mais significativos obtidos via decomposição SVD da matriz de projeção \mathbf{p}_L , obtida a partir da decomposição QR dos dados experimentais.

3 Descrição do sistema massa-mola

O sistema massa-mola de dois graus de liberdade a ser identificado neste trabalho consiste no equipamento ECP mostrado na Figura 1. O sistema consiste em 3 carrinhos de massas m_1 , m_2 e m_3 , conectados por duas molas. O primeiro carrinho de massa m_1 , executa um movimento prescrito determinado a partir de um servomotor, o qual consiste diretamente em uma função deslocamento. Portanto, este carro é responsável pelo movimento das outras duas massas.



Figura 1: Aparato experimental do sistema massa-mola de dois graus de liberdade.

O sistema de aquisição de dados coleta a quantidade de pulsos (*counts*) detectados pelos *encoders* 1, 2 e 3, instalados para medir o deslocamento linear de cada carrinho. Neste caso, os *encoders* são sensores eletro-mecânicos responsáveis por detectar um movimento mecânico angular e converter o sinal elétrico em valores de posição linear. Neste trabalho, o fator de conversão utilizado para os sensores foi de 2259 *counts* correspondendo a aproximadamente 1 cm de deslocamento linear.

Ainda, considerando a priori uma modelagem analítica do sistema massa-mola, tem-se que a dinâmica do sistema pode ser representada por um modelo em espaço de estados de quarta ordem, onde as matrizes do sistema são escritas em função constantes de elasticidade das molas, k_1 e k_2 , das constantes de amortecimento dos amortecedores, b_1 e b_2 , consideradas em paralelo a cada rigidez e das massas dos carrinhos 2 e 3, m_2 e m_3 , respectivamente. O sinal de entrada é dado pelo deslocamento prescrito $x_1(t)$ do carrinho 1 e as saídas $x_2(t)$ e $x_3(t)$ são os deslocamentos dos carrinhos 2 e 3, respectivamente.

Caso fosse aplicado um método de identificação caixa cinza, os parâmetros do modelo poderiam ser determinados explicitamente, pois além dos dados de entrada e saída do sistema, informações auxiliares para descrição do sistema seriam utilizadas, incluindo a necessidade de fornecimento um modelo matemático (conhecimento a priori) da dinâmica do sistema. Porém, em se tratando de métodos de subespaços, o modelo identificado neste trabalho será uma transformação de similaridade do sistema real.

4 Resultados da Identificação

Neste trabalho o algoritmo de subespaços DSR_e foi aplicado para identificação do sistema massa-mola. De modo geral, não é possível determinar explicitamente os parâmetros de massa, amortecimento e rigidez do sistema, porém o modelo obtido ainda é representativo da dinâmica do sistema e pode ser bem utilizado em diversas aplicações. Atualmente, existem técnicas de identificação por subespaços sendo desenvolvidas para posterior determinação direta dos parâmetros físicos dos sistemas. Porém, este assunto não é escopo deste artigo.

Retomando a ideia principal, e tendo sido apresentada na Seção 2 o algoritmo DSR_e , os dados de entrada e saída do sistema massa-mola foram utilizados para identificação. Um total de $N = 563$ amostras foram usadas tanto para a etapa de identificação quanto para a etapa de validação do modelo, tendo em vista apenas o tamanho reduzido do sinal coletado.

O sinal de excitação utilizado para a identificação do sistema corresponde ao deslocamento $x_1(t)$ do primeiro carrinho e as saídas são os respectivos deslocamentos $x_2(t)$ e $x_3(t)$. Os dados foram coletados com período de amostragem $T = 0,018$ s e o algoritmo de identificação foi aplicado, com parâmetros $J = 30$ e $L = 3$. Em seguida, uma decomposição SVD da matriz de projeção dos dados de entrada-saída foi obtida e a Figura 2 apresenta uma estimativa da ordem n do sistema.

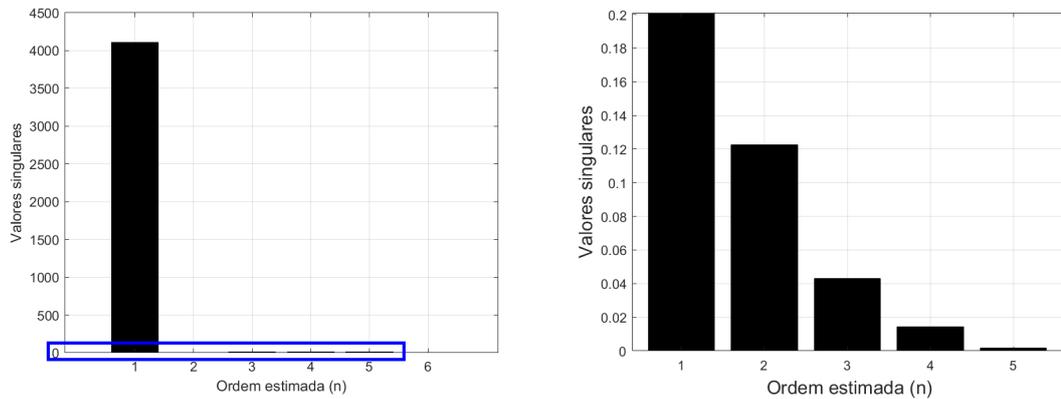


Figura 2: (a) Estimativa da ordem do sistema via decomposição em valores singulares. Parâmetros de identificação: $J = 100$ e $L = 3$; (b) Figura 2(a) ampliada.

Baseado na decomposição SVD apresentada na Figura 2 não foi possível inferir a ordem do modelo baseada nos valores singulares mais significativos, pois a matriz de projeção é mal condicionada. Além disso, o resultado obtido via SVD não é esperado, visto que o sistema contém pelo menos duas rigidezes de molas. Portanto, não foi possível inferir a ordem do modelo baseada nos valores singulares mais significativos. Porém, baseado no conhecimento prévio da modelagem do sistema adotou-se ordem $n = 4$.

A partir dos autovalores da matriz dinâmica discreta \mathbf{A}_d tem-se que o modelo é estável em malha aberta, sendo os autovalores discretos $z_{1,2} = 0,9281 \pm j0,3421$ e $z_{3,4} = 0,9774 \pm j0,1436$. Por sua vez, as previsões de saída dos deslocamentos $x_2(t)$ e $x_3(t)$ do modelo identificado capturam bem a dinâmica do sistema, conforme mostrado na Figura 3. Ainda, como forma de avaliar a qualidade do modelo identificado, o índice MRSE (*Mean Relative Squared Error*) foi calculado baseado em [14], sendo o índice de 4,73% e 6,48%, para as saídas x_2 e x_3 , respectivamente. Assim, observa-se que o modelo de quarta ordem apresenta baixo índice MRSE para as saídas previstas.

Mediante os resultados obtidos, conclui-se que os métodos de subespaços proveem modelos representativos da dinâmica dos sistemas identificados. Além disso, métodos SIM fornecem um

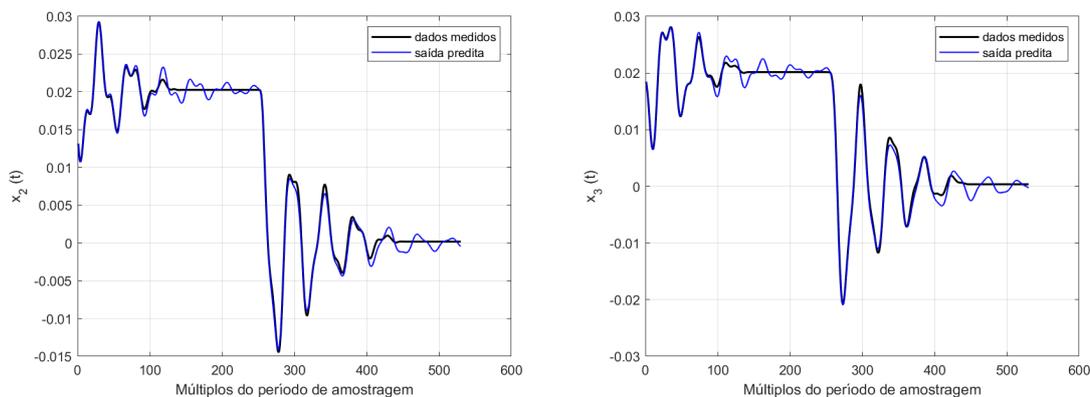


Figura 3: Predições de saída do modelo identificado: (a) predições de saída $x_2(t)$ e (b) predições de saída $x_3(t)$.

modelo mais simples do comportamento dinâmico o qual pode ser muito útil para fins de projeto de controle, principalmente quando se trata de sistemas complexos e multivariáveis. Portanto, métodos de subespaços são uma alternativa viável para modelagem e, se comparado com outros algoritmos de otimização, requerem menos esforço computacional para computar as matrizes do sistema.

5 Conclusão

Neste trabalho foi apresentada a identificação por subespaços de um sistema dinâmico massa-mola de dois graus de liberdade usando o algoritmo DSR_e . Dados reais foram utilizados para verificar a eficiência do método de subespaço em sistemas operando em malha aberta e também avaliar a qualidade dos dados usados para a identificação. O modelo obtido, a partir de dados experimentais do sistema operando em malha aberta, é representativo, conforme predições de saída e índices MRSE calculados. O sistema massa-mola apresentado possui características predominantemente lineares e está disponível para testes no Laboratório de Dinâmica de Estruturas - LabDIN do ITA (Instituto Tecnológico de Aeronáutica), o que motivou sua aplicação neste trabalho. Futuramente, outros sinais de excitação serão utilizados para o procedimento de identificação. Adicionalmente, pretende-se também comparar o desempenho do algoritmo DSR_e com os resultados da identificação via método OEM (*Output-Error Method*).

6 Agradecimentos

O autor Airton Nabarrete agradece ao CNPq por apoiar financeiramente a pesquisa, conforme processo 317388/2021-5.

Referências

- [1] R. D. Al-Dabbagh et al. “System Identification and Control of Robot Manipulator Based on Fuzzy Adaptive Differential Evolution Algorithm”. In: **Advances in Engineering Software**, Vol. 78, 2014, pp. 60–66, doi: <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2014.08.009>.

- [2] D. Bauer. "Asymptotic properties of subspace estimators". **Automatica**, Vol.41, 2005, No. 3, pp. 359-376.
- [3] D. Di Ruscio. "A Bootstrap Subspace Identification Method: Comparing Methods for Closed Loop Subspace Identification by Monte Carlo Simulations". In: **Modeling, Identification and Control**, Vol. 30, No. 4, 2009, pp. 203–222.
- [4] D. Di Ruscio. "Subspace System Identification of the Kalman Filter: Open and Closed Loop Systems." In: **Proc. Intl. Multi-Conf. on Engineering and Technological Innovation**, 2008.
- [5] D. Di Ruscio. "Combined deterministic and stochastic system identification and realization: DSR - a subspace approach based on observations", **Norwegian Society of Automatic Control**, pp 193-230, 1996.
- [6] S. A. Fatima et al. "System Identification of Industrial Debutanizer Column", **9th IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineering (IC-CSCE)**, Penang, Malaysia, 2019, pp. 178-183, doi: 10.1109/ICCSCE47578.2019.9068541.
- [7] J. Grauer e M. Boucher. "System Identification of Flexible Aircraft: Lessons Learned from the X-56A Phase 1 Flight Tests". **AIAA**, 2020, p. 1017, doi: <https://doi.org/10.2514/6.2020-1017>.
- [8] E. M. Hemerly. **Controle por Computador de Sistemas Dinâmicos.**, Edgard Blucher, 2000.
- [9] B. L. Ho and R. E. Kalman. "Editorial: Effective construction of linear state-variable models from input/output functions: Die Konstruktion von linearen Modeilen in der Darstellung durch Zustandsvariable aus den Beziehungen für Ein- und Ausgangsgrößen". In: **at - Automatisierungstechnik**, Vol. 14, No. 1-12, 1966, pp. 545–548. doi: <https://doi.org/10.1524/auto.1966.14.112.545>.
- [10] M. Jalanko et al. "Adaptive System Identification of Industrial Ethylene Splitter: A Comparison of Subspace Identification and Artificial Neural Networks". In: **Computers and Chemical Engineering**, Vol. 147, 2021, p. 107240. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2021.107240>.
- [11] R. Jategaonkar. **Flight Vehicle System Identification: A Time Domain Methodology**. Vol. 216, isbn: 978-1-62410-278-3.
- [12] T. Katayama. **Subspace methods for system identification**. Kyoto: Springer, 2005.
- [13] J. Liu et al. "A Modified Time Domain Subspace Method for Nonlinear Identification Based on Nonlinear Separation Strategy". In: **Nonlinear Dynamics**, Vol. 94, doi: 10.1007/s11071-018-4505-6.
- [14] R. C. Machado. "Métodos de subespaços para identificação de sistemas em mlha fechada", 144 p., Thesis of Master of Science - Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), 2013.
- [15] P. Van Overschee and B. L. R. De Moor. **Subspace identification for linear systems: theory, implementations, applications**. Leuven: Kluwer Academic Publishers, 1996.