Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Três Perspectivas para um Modelo de Seleção de Carteiras a Três momentos

Patricia R. Martins[1], Patrícia N. Silva[2], Carlos Frederico Vasconcellos[3]
IME/UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. Neste trabalho, analisamos três versões de um modelo de seleção de carteiras de investimento que considera momentos de ordem superior. Cada problema investigado consiste em um problema de otimização condicionada. Esta abordagem permite avançar na compreensão da fronteira eficiente no modelo a três momentos e sua relação com o modelo clássico de média-variância. Como principais contribuições, destacamos a prova de existência de solução para cada um destes problemas e uma caracterização dos conjuntos factíveis associados com respeito à independência linear dos gradientes das restrições. Isto nos permite tratar também os casos degenerados. O tratamento conjunto dos três problemas permite avanços na compreensão da fronteira eficiente no modelo a três momentos.

Palavras-chave. Seleção de Carteiras de Investimentos, Momentos de Ordem Superior, Assimetria.

1 Introdução

Na Teoria Moderna do Portfólio, Markowitz [7] propôs um modelo para seleção de carteiras de investimento. A carteira ótima é aquela que oferece o maior retorno para uma dada variância ou, equivalentemente, proporciona a menor variância dado um retorno esperado. Markowitz [7] deu uma resposta ao problema de seleção de carteiras considerando um cenário de distribuição normal de retornos de ativos. Muito se discute ainda sobre o fato da distribuição dos retornos dos ativos apresentar uma assimetria significativa e nem sempre seguir uma distribuição normal de probabilidade. Neste contexto, o modelo proposto por Markowitz [7] considera uma aproximação de segunda ordem para a função utilidade do investidor e a carteira ótima é aquela que a maximiza. Trabalhos como Arditti e Levy [1] e Kraus e Litzenberger [6], apontam a relevância dos momentos de ordem superior, fora de um contexto de distribuição normal. O interesse pela otimização de um portfólio onde figuram momentos de ordem superior à ordem 2 dos retornos dos ativos que compõe a carteira vem se renovando nos últimos anos, e a influência desses momentos tem sido amplamente investigada, dada a possibilidade de se obter uma melhor aproximação para a função utilidade. Estudos como Athayde e Flôres [2], Barone-Adesi [3], Harvey e Siddique [5] também argumentam sobre a importância dos momentos de ordem superior para a escolha de uma carteira mais eficiente. Scott e Horvath [8] fornecem um suporte formal para a aplicação desta teoria, mostrando que, no contexto da otimização, para maximizar a função utilidade, os momentos ímpares devem ser maximizados, enquanto que os momentos pares devem ser minimizados, o que se traduz na satisfação do investidor. Neste sentido, Athayde e Flôres [2] propõem um modelo que incorpora o momento centrado na média de ordem 3 dos retornos dos ativos, aqui tratado por assimetria, ao problema de selecionar carteiras de investimento, estendendo o modelo Média-Variância de Markowitz [7]. Afirmam que a seleção de portfólio pode ser vista como um problema

[1]patricia.martins@pos.ime.uerj.br
[2]nunes@ime.uerj.br
[3]cfredvasc@ime.uerj.br

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0106

de minimização da variância sujeito a retorno esperado e assimetria fixos, o que corresponde a um problema de otimização com duas restrições. Em seu trabalho, eles apresentam um modelo matemático que considera os três primeiros momentos na seleção do portfólio e um importante resultado de dualidade. A dualidade em problemas de otimização garante, sob certas condições, a mesma solução para duas configurações do mesmo problema.

Neste trabalho, motivados a responder questões deixadas em aberto para o problema de seleção de carteiras de investimento, consideramos o modelos a três momentos de três pontos de vista: o de minimização da variância, considerado em Athayde e Flôres [2]; o de maximização do retorno e o de maximização da assimetria. Em cada modelo, temos um problema de otimização sujeito a duas restrições de igualdade. A caracterização da carteira ótima consiste em indicar quais as frações do capital deve ser investida em cada ativo. Nossas principais contribuições são: provamos a existência de solução para cada um destes problemas; em cada modelo, caracterizamos no conjunto factível, os subconjuntos em que os gradientes das restrições são ou não linearmente independentes. Isto nos permite tratar também os casos degenerados e, em particular, avançar na análise do modelo a três momentos. Além disso, nossos resultados permitem explorar a estrutura geométrica da chamada fronteira eficiente, conjunto de carteiras que é solução simultânea dos três modelos considerados. Nossa abordagem dos três problemas permite avançar na compreensão da fronteira eficiente no modelo a três momentos e sua relação com o modelo Média-Variância.

2 Modelo Média-Variância e Modelo a três momentos

Para Markowitz [7], os principais fatores a serem considerados na observação dos ativos são: o risco e o retorno, onde o retorno esperado da carteira é definido como a média dos retornos médios dos ativos, a ser ponderada pelos pesos, e o risco é mensurado como o desvio dos resultados esperados em relação à sua média, ou seja, é a variância dos retornos dos ativos, uma medida de dispersão ligada ao grau de incerteza, e que caracteriza a volatilidade associada ao retorno esperados. Vamos determinar uma carteira com n ativos de risco, mais um ativo livre de risco, e serão permitidas venda a descoberto. Seja $E[X_i]$ o retorno esperado do i-ésimo ativo, aqui definido como retorno médio. Seja $cov[X_i, X_j]$ a covariância entre X_i e X_j, e consequentemente $cov[X_i, X_i]$, a variância do i-ésimo ativo. Sejam M_1 e M_2 as matrizes contendo as médias e covariâncias dos retorno observados dos ativos de risco presentes neste portfólio e $[\mathbf{1}]$ um vetor n-dimensional composto por 1's. O retorno esperado da carteira, $E(r_p)$, é uma composição do retorno esperado para o conjunto dos ativos com risco, mais o retorno r_f do ativo livre de risco. O retorno esperado da carteira, $E(r_p)$ e a variância da carteira são dados respectivamente por

$$E(r_p) = \alpha^t M_1 + (1 - \alpha^t[\mathbf{1}])r_f \quad \text{e} \quad var[r_p] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j cov[X_i, X_j] = \alpha^t M_2 \alpha.$$

Esta configuração garante que a soma dos pesos de todos os ativos, com e sem riscos, presentes na carteira será igual a 1, segundo o retorno esperado $E(r_p)$, sem que com isso seja necessário incluir uma restrição específica aos pesos da carteira no problema de otimização.

Expressa-se por R, $R = E(r_p) - r_f$ o retorno excedente da carteira. A matriz de retornos excedentes dos ativos com risco será expressa por $x = M_1 - [\mathbf{1}]r_f$. Assim pode-se expressar a restrição do retorno excedente esperado como $R = \alpha^t x$.

O problema de otimização para o modelo de Markowitz consiste em:

$$\begin{cases} \min \alpha^t M_2 \alpha \\ \alpha^t x = R \end{cases}, \tag{1}$$

que corresponde a um problema de otimização restrita que minimiza a variância da carteira, sob a única restrição do retorno excedente igualar-se a R.

Definição 2.1. *Uma carteira admissível α^* (Média-Variância) é chamada eficiente se não existir nenhuma carteira admissível α com*

$$E[r_p(\alpha)] \geqslant E[r_p(\alpha^*)], \qquad var[r_p(\alpha)] < var[r_p(\alpha^*)].$$

Esta definição nos diz que não há como superar o retorno de uma carteira eficiente sem que ocorra o aumento do risco. A satisfação máxima do investidor está diretamente relacionada ao retorno e ao risco que a carteira de investimentos pode oferecer. Supondo que o investidor busca maximizar o retorno de sua carteira a certo risco aceitável, ou minimizar o risco para um retorno desejado, previamente estabelecido, carteiras de investimento que apresentam este perfil são ditas carteiras eficientes.

A solução única α_M deste problema é dada por:

$$\alpha_M = \frac{R}{A_0} M_2^{-1} x \,, \tag{2}$$

em que $A_0 = x^t M_2^{-1} x$. De (2), obtém-se a variância mínima $\sigma_{p^2 M}$, associada ao portfólio ótimo α_M, $\sigma_{p^2 M} = {R^2}/{A_0}$. Chamaremos o portfólio de Markowitz α_M de solução trivial.

Em seu modelo, Athayde e Flôres [2] buscam carteiras eficientes no caso de n ativos com risco mais um ativo sem risco, permitindo venda a descoberto de modo que não há restrições sobre os pesos da carteira. Consideram aqui os três primeiros momentos de distribuição verificados para os n ativos de risco. Para encontrar um portfólio ótimo, eles minimizam a variância quando o retorno excedente e a assimetria estão fixados:

$$\begin{cases} \min \alpha^t M_2 \alpha \\ \alpha^t x = R \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \end{cases}, \tag{3}$$

onde M_3 é a matriz contendo as co-assimetrias calculadas a partir dos retornos observados de cada um dos n ativos de risco que compõe a carteira, $\otimes$ refere-se ao produto de Kronecker e $M_3\alpha^{\otimes 2} = \alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha)$. Athayde e Flôres não apresentaram prova de existência de solução para (3) mas apresentaram uma expressão implícita que deve ser satisfeita por soluções de (3):

$$M_2\alpha = \frac{A_0\sigma_{p^3} - A_2 R}{A_0 A_4 - (A_2)^2} M_3\alpha^{\otimes 2} + \frac{A_4 R - A_2\sigma_{p^3}}{A_0 A_4 - (A_2)^2} x, \tag{4}$$

em que os escalares:

$$A_0 = x^t M_2^{-1} x, \qquad A_2 = x^t M_2^{-1} M_3 \alpha^{\otimes 2}, \qquad A_4 = (M_3\alpha^{\otimes 2})^t M_2^{-1} M_3 \alpha^{\otimes 2}$$

têm subscritos correspondentes ao seu grau de homogeneidade como funções reais do vetor α. Em particular, A_0 e A_4 são positivos, uma vez que a inversa da matriz de covariância é positiva definida. Além disso, calcularam a variância ótima:

$$\sigma_{p^2} = \frac{A_4 R^2 - 2A_2 R\sigma_{p^3} + A_0(\sigma_{p^3})^2}{A_0 A_4 - (A_2)^2}$$

e provaram a seguinte propriedade de homotetia:

Proposição 2.1. *Para um dado k positivo, seja $\bar{\alpha}$ o portfólio de variância mínima quando $R = 1$ e $\sigma_{p^3} = k^3$, e $\bar{\sigma}_{p^2}$ a variância mínima correspondente, então, para todo portfólio ótimo relacionado ao par assimetria/retorno tal que $\sigma_{p^3} = k^3 R^3$, uma solução para (3) será $\alpha = \bar{\alpha} R$, com variância mínima correspondente $\sigma_{p^2} = \bar{\sigma}_{p^2} R^2$.*

3 Modelo a três momentos: três versões

Ao considerar os três primeiros momentos, há três configurações possíveis. Pode-se minimizar o momento de ordem par fixando os dois momentos de ordem ímpar; ou, de forma equivalente, maximizar um momento de ordem ímpar fixando os outros dois. Tendo em mente resultados de dualidade, vamos considerar o modelos em três versões. Para cada versão, apresentamos também o sistema associado aos multiplicadores de cada problema de otimização considerado.

$$\begin{cases} \min \alpha^t M_2 \alpha \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t x = R \end{cases} \tag{5a}$$

$$\begin{cases} 3\lambda_1 A_4 + \lambda_2 A_2 = 2\sigma_{p^3} \\ 3\lambda_1 A_2 + \lambda_2 A_0 = 2R \end{cases} \tag{5b}$$

$$\begin{cases} \max \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t x = R \end{cases} \tag{6a}$$

$$\begin{cases} 2\gamma_1 \sigma_{p^2} + \gamma_2 R = 3\alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} \\ 2\gamma_1 R + \gamma_2 A_0 = 3A_2 \end{cases} \tag{6b}$$

e

$$\begin{cases} \max \alpha^t x \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \end{cases} \tag{7a}$$

$$\begin{cases} 3\mu_1 A_4 + 2\mu_2 \sigma_{p^3} = A_2 \\ 3\mu_1 \sigma_{p^3} + 2\mu_2 \sigma_{p^2} = \alpha^t x \end{cases} \tag{7b}$$

que completa o conjunto de duais possíveis para o problema de otimização.

3.1 Existência de solução

Teorema 3.1. *Dados $\sigma_{p^2} > 0$ e $R > 0$, seja $D = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha \text{ e } R = \alpha^t x\}$. Se $D \neq \emptyset$, então o problema de otimização (6a) admite solução.*

Prova. Observe que $D = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha \text{ e } R = \alpha^t x\}$ é um conjunto compacto não vazio, e que $\alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2}$ é uma função contínua em $\mathbb{R}^n$. Sendo assim, pelo corolário 16.7 in Bartle [4]), o problema de otimização (6a) admite solução. $\square$

Teorema 3.2. *Dados $\sigma_{p^2} > 0$ e $\sigma_{p^3} > 0$, seja $G = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^3} = \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} \text{ e } \sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha\}$. Se $G \neq \emptyset$, então o problema de otimização (7a) admite solução.*

Prova. Análoga à do Teorema 3.1. $\square$

A prova não pode ser repetida para o problema de minimizar a variância, pois nesta configuração o conjunto admissível não é um compacto. Nesta caso, exploramos o fato de a função objetivo ser quadrática e a interseção das restrições ser um conjunto fechado.

Teorema 3.3. *Dados $\sigma_{p^3} \in \mathbb{R}$ e $R > 0$, seja $F = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^3} = \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} \text{ e } R = \alpha^t x\}$. Se $F \neq \emptyset$, então o problema de otimização (5a) admite solução.*

Prova. Como M_2 é uma matriz definida positiva, o produto interno $\langle \alpha, \beta \rangle_0 = \alpha^t M_2 \beta$ induz uma norma $\|\alpha\|_0^2 = \alpha^t M_2 \alpha$. Logo, $J(\alpha) = \alpha^t M_2 \alpha$ é um funcional não negativo. Sabendo que no $\mathbb{R}^n$ todas as normas são equivalentes, temos que existem constantes positivas a e b tais que $a\|\alpha\| \leq \|\alpha\|_0 \leq b\|\alpha\|$. Logo J é um funcional contínuo, coercivo e possui cota inferior em F, um subconjunto fechado do $\mathbb{R}^n$. Seja $p = \inf\{J(\alpha) : \alpha \in F\} \in \mathbb{R}$, o ínfimo de J em F. Então existe uma sequência $\{\alpha_n\}$ em F tal que $J(\alpha_n) \to p$. Como J é coercivo, $\{\alpha_n\}$ é uma sequência limitada, ou seja, existe

$M > 0$ tal que $\|\alpha_n\| \leq M$ para todo n. Logo, por Bolzano Weierstrass, existe pelo menos uma subsequência de $\{\alpha_n\}$ que converge, $\alpha_{n_k} \to \alpha_0$. Como F é fechado então $\alpha_0 \in F$. Daí, como J é contínuo, temos que $J(\alpha_{n_k}) \to J(\alpha_0)$. Por outro lado, sabemos que $J(\alpha_{n_k}) \to p$. Então, pela unicidade do limite, $p = J(\alpha_0)$. Assim, J tem mínimo em F e $J(\alpha_0) = \min\{J(\alpha) : \alpha \in F\}$. □

3.2 Dependência linear

A partir daqui, vamos considerar restrições tais que o conjunto admissível seja sempre não vazio. Vamos discutir a resolução do sistema (6b) com base no determinante de sua matriz de coeficientes A_M. Ela depende apenas dos parâmetros fixos do problema de otimização (6a). A matriz A_M não depende do $\alpha \in D = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha \text{ e } R = \alpha^t x\}$ que gerou o sistema (6b). Portanto, é natural que seu determinante tenha um comportamento único em todo o conjunto factível. A proposição a seguir nos mostra que o determinante de A_M se anula se e somente se o conjunto admissível for unitário.

Proposição 3.1. *Dados $x \in \mathbb{R}^n$, M_2, $\sigma_{p^2} > 0$, e $R > 0$, para todo $\alpha \in D$, $\det A_M > 0$ se e somente se os vetores x e $M_2\alpha$ são linearmente independentes. Além disso, se x e $M_2\alpha$ são linearmente dependentes, então $A_0 M_2 \alpha = Rx$.*

Prova. Considere a norma $\|\alpha\|_1^2 = \alpha^t M_2^{-1} \alpha$, induzida pelo produto interno $\langle \alpha, \beta \rangle_1 = \alpha^t M_2^{-1} \beta$, como a inversa de uma matriz de covariâncias é definida positiva. Portanto, para qualquer $\alpha \in D$, pode-se escrever

$$\det A_M = \sigma_{p^2} A_0 - R^2 = \|x\|_1^2 \|M_2\alpha\|_1^2 - (\langle x, M_2\alpha \rangle_1)^2 \geq 0,$$

a última desigualdade, usando Cauchy-Schwarz. Esta será igual a zero se e somente se x e $M_2\alpha$ forem linearmente dependentes. Para a segunda parte, usando a mesma norma,

$$A_0[\det A_M] = A_0^2 \sigma_{p^2} - A_0 R^2 - A_0 R^2 + A_0 R^2 = \|A_0 M_2 \alpha - Rx\|_1^2 \geq 0. \tag{8}$$

a igualdade a zero implica necessariamente que $A_0 M_2 \alpha - Rx = 0$.

Consequentemente, se $\alpha \in D$ é tal que $\det A_M = 0$, então x e $M_2\alpha$ são linearmente dependentes, e por (8), temos $A_0 M_2 \alpha = Rx$. □

Ao contrário do caso em que se maximiza da assimetria, a matriz de coeficientes A_F associada ao sistema dos multiplicadores (5b) depende do $\alpha \in F = \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \sigma_{p^3} = \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} \text{ e } R = \alpha^t x\}$ que gerou o sistema. Para enfatizar tal dependência, escreveremos $A_F(\alpha)$. Introduzimos então uma nova proposição e mostramos que tratar $\det A_F(\alpha) > 0$ equivale a assumir independência linear entre os gradientes das restrições.

Proposição 3.2. *Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e M_3. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\det A_F(\alpha) > 0$ se e somente se os vetores x e $M_3\alpha^{\otimes 2}$ são linearmente independentes. Além disso, se x e $M_3\alpha^{\otimes 2}$ são linearmente dependentes, então $A_0 M_3 \alpha^{\otimes 2} = A_2 x$.*

Tal como em (5b), os elementos da matriz de coeficientes A_R do sistema (7b) dependem de $\alpha \in G = \{\alpha \in \mathbb{R}^n,\ \sigma_{p^2} = \alpha^t M_2 \alpha \text{ e } \sigma_{p^3} = \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2}\}$ e o sinal de seu determinante se relaciona com a dependência linear entre os gradientes da restrição do problema (7a).

Proposição 3.3. *Dados M_2, M_3, $\sigma_{p^2} > 0$, $\sigma_{p^3} \in \mathbb{R}$, fixos. Para todo $\alpha \in G$, o determinante de A_R, $\det\ A_R(\alpha) = \sigma_{p^2} A_4 - \sigma_{p^3}^2$, é estritamente positivo se e somente se os vectores $M_2\alpha$ e $M_3\alpha^{\otimes 2}$ forem linearmente independentes. Além disso, se $M_2\alpha$ e $M_3\alpha^{\otimes 2}$ forem linearmente dependentes, então $\sigma_{p^3} M_3 \alpha^{\otimes 2} = A_4 M_2 \alpha$.*

As demonstrações da Proposições 3.2 e 3.3 são análogas à prova da Proposição 3.1.

4 Algumas propriedades qualitativas

As observações apresentadas nesta seção resultam de combinação dos teoremas de existência e das proposições apresentadas na Seção 3. Vamos indicar propriedade associadas ao problema (6a).

4.1 Maximizando a assimetria

Quando as restrições do problema (6a) são tais que o hiperplano de retorno toca o hiper-elipsóide de variância, os gradientes das restrições são linearmente dependentes. É possível mostrar que existe um único α no conjunto factível, este portfólio é a solução para o problema de otimização e ele coincide com a solução clássica de Markowitz α_M, apresentada em (2). Quando o conjunto admissível D é não vazio e não unitário, não há dependência linear entre os gradientes das restrições e obtemos uma solução não trivial que maximiza a assimetria. A Proposição 3.1 nos mostra que o determinante de A_M é um marcador para a presença ou ausência da solução de Markowitz no conjunto admissível. A opção de tratar o problema de seleção de carteiras sob a ótica da maximização da assimetria permite analisar com muita clareza a relação do modelo a três momentos com o modelo clássico de Markowitz. Observe que o determinante de A_M se anula se e somente se fixarmos a variância em $\sigma_{p_2} = R^2/A_0$. Além disso, ela nos diz que o caso $\det A_M > 0$ corresponde à totalidade dos casos em que a hipótese de independência linear do gradiente das restrições é satisfeita e a solução do problema (6a) satisfaz

$$\left(\frac{A_0\alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} - A_2 R}{\sigma_{p^2} A_0 - R^2}\right)\alpha = M_2^{-1} M_3 \alpha^{\otimes 2} - \left(\frac{\sigma_{p^2} A_2 - \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} R}{\sigma_{p^2} A_0 - R^2}\right) M_2^{-1} x. \tag{9}$$

A partir de (9) e considerando que a dualidade entre os problemas de otimização está condicionada ao multiplicador positivo γ_1, podemos afirmar que a solução eficiente estará sempre associada à assimetria máxima dada por:

$$\sigma_{p^3} = \frac{A_2 R + \sqrt{(A_0 A_4 - (A_2)^2)(\sigma_{p^2} A_0 - R^2)}}{A_0}. \tag{10}$$

Quando $\det A_M = 0$, a solução α^* de (6a) coincide com a solução clássica de Markowitz α_M, e a assimetria máxima associada é dada por $\sigma_{p^3} = (A_{2M}/A_0)R$, com $A_{2M} = x^t M_2^{-1} M_3 \alpha_M^{\otimes 2}$. Observe que (10) também pode ser usado quando $\det A_M = 0$ para obter a assimetria ótima associada a α_M.

5 Considerações Finais

Consequências análogas foram também obtidas para os problemas (5a) e (7a) através da combinação dos teoremas de existência e das proposições apresentadas na Seção 3.

O Teorema 3.3 permite o uso do método dos multiplicadores de Lagrange na análise do problema (5a) na medida em que garante a existência de uma solução para (5a). Além disso, reforça a condição necessária (4) obtida por Athayde e Flôres [2] ao garantir que pelo menos um $\alpha \in F$ a satisfaça. Pela Proposição 3.2, o caso $\det A_F(\alpha) > 0$ corresponde à totalidade dos casos em que os gradientes das restrições atendem à hipótese de independência linear. Assim, permite o uso do método dos multiplicadores de Lagrange por Athayde e Flôres [2] para determinar soluções para o problema de otimização (5a). Eles deduziram uma condição necessária para que um elemento do conjunto factível F, que satisfaça a hipótese de posto completo nos gradientes das restrições, seja uma solução de (5a). Ao contrário do que ocorre na configuração em que maximiza-se a assimetria, nem todo elemento α do conjunto admissível F é tal que os gradientes $M_3\alpha^{\otimes 2}$ e x são linearmente independentes. Portanto, requer uma investigação mais aprofundada sobre o conjunto factível F de soluções potenciais para o problema (5a) para o qual $\det A_F(\alpha) = 0$. Não podemos usar o método clássico dos multiplicadores de Lagrange nesses casos, e eles foram deixados.

Analogamente, a Proposição 3.3 nos mostra que $\det A_R > 0$ corresponde à totalidade dos casos em que a hipótese de independência linear do gradiente das restrições é satisfeita. Quando os vetores $M_2\alpha$ e $M_3\alpha^{\otimes 2}$ são linearmente dependentes, e o vetor x pertence ao espaço gerado por eles, a solução de (7a) é a solução clássica de Markowitz, e há uma tangência tripla entre todas as três hiper-superfícies. Caso contrário, quando $\sigma_{p^2} A_4 - \sigma_{p^3}^2 = 0$ mas x não pertence ao espaço unidimensional gerado por $M_2\alpha$ e $M_3\alpha^{\otimes 2}$, a solução de (7a) não é a clássica de Markowitz, e tanto $\det A_M(\alpha)$ como $\det A_F(\alpha)$ são não nulos, já que o hiperplano de retorno não tangencia as demais hiper-superfícies em α, solução de (7a). Quando $\sigma_{p^2} A_4 - \sigma_{p^3}^2 \neq 0$, informações adicionais podem ser obtidas considerando o caso interessante quando a restrição de assimetria é não vinculativa, o que equivale a $\mu_1 = 0$. Segue da Proposição 3.1 que a solução clássica de Markowitz é a solução de (7a) quando $\sigma_{p^2} A_4 - \sigma_{p^3}^2 \neq 0$ e a restrição de assimetria é não vinculativa.

Ajustamos a prova da Proposição 2.1 e obtivemos resultados análogos de homotetia pra os problemas (6a) e (7a). Além disso, foi possível tratar os casos deixados em aberto em Athayde e Flôres [2] associados ao $\det A_F = 0$ e seus análogos nas outras duas versões do modelo a três momentos. Adicionalmente aos resultados aqui apresentados, o tratamento conjunto dos três problemas permitiu avançar na compreensão da fronteira eficiente bem como deduzir testes de pertencimento à fronteira eficiente.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da Faperj, processos E26/010.101140/2018 e E26/010.001143/2019.

Referências

[1] F. D. Arditti e H. Levy. "Portfolio efficiency analysis in three moments: The multiperiod case". Em: **Journal of Finance** 30 (1975), pp. 797–809.

[2] G. M. Athayde e R. G. Flôres. "Finding a maximum skewness portfolio–a general solution to three-moments portfolio choice". Em: **Journal of Economic Dynamics and Control** 28 (2004), pp. 1335–1352.

[3] G. Barone-Adesi. "Arbitrage equilibrium with skewed asset returns". Em: **Journal of Financial and Quantitative Analysis** 20 (1985), pp. 299–313.

[4] R. G. Bartle. **Elementos de análise real**. Rio de Janeiro: Editora Campus Ltda, 1983. ISBN: 978-8-570-01113-8.

[5] C. R. Harvey e A. Siddique. "Conditional skewness in asset pricing tests". Em: **The Journal of Finance** 55 (2000), pp. 1263–1295.

[6] A. Kraus e R. H. Litzenberger. "Skewness preference and the valuation of risk assets". Em: **The Journal of Finance** 31 (1976), pp. 1085–1100.

[7] H. Markowitz. "Portfolio selection". Em: **The Journal of Finance** 7 (1952), pp. 77–91.

[8] R. C. Scott e P. A. Horvath. "On the direction of preference for moments of higher order than the variance". Em: **The Journal of Finance** 35 (1980), pp. 915–919.

