

Resolução Numérica do Problema da Cavidade com Tampa Móvel utilizando a Linguagem de Programação Julia

Guilherme C. Tomiasi¹

FCT - Unesp, Presidente Prudente, SP

Rafael L. Sterza²

ICMC/USP, São Carlos, SP

Analice C. Brandi³

DMC/FCT - Unesp, Presidente Prudente, SP

Resumo. O problema da cavidade é um problema fundamental na Mecânica dos Fluidos que analisa o comportamento do fluido em uma cavidade quadrada com uma tampa móvel e possui as equações de Navier-Stokes como governantes no problema. Este trabalho visa estudar a resolução numérica do problema através da formulação corrente-vorticidade, com diferentes abordagens para a resolução da equação de Poisson e aproximações das velocidades. A implementação foi feita utilizando a linguagem de programação Julia, pois permitiu realizar uma otimização no código através da fácil consulta ao código-fonte, obtendo um menor custo computacional e, assim, tornando-se possível obter resultados para altos números de Reynolds.

Palavras-chave. Equações de Navier-Stokes, Problema da Cavidade, Método de Diferenças Finitas, Linguagem de Programação Julia.

1 Introdução

O escoamento forçado pelo movimento da tampa de uma caixa tem sido estudado extensivamente ao longo dos anos na Mecânica dos Fluidos, pois é caracterizado por uma série de fenômenos interessantes e complexos, incluindo a formação de vórtices e a separação da camada limite. Seu estudo continua fornecendo informações sobre o comportamento dos fluidos em várias configurações. Um dos primeiros estudos mais notáveis desse problema é de Ghia, Ghia e Shin (1982) [4], que usou um método de diferenças finitas para resolver as equações de Navier-Stokes que governam o escoamento. Seu trabalho estabeleceu a solução de referência para o problema que, desde então, tem sido utilizado para validar vários outros métodos de simulação.

Esse trabalho objetiva estudar, aprimorar e otimizar a resolução numérica do problema de escoamento de cavidade quadrada cuja tampa móvel tem velocidade constante. O foco encontra-se na solução do sistema linear obtido pela equação de Poisson presente na formulação corrente-vorticidade e, também, a obtenção das velocidades. As duas abordagens foram realizadas através de aproximações de segunda e quarta ordem. Ressalta-se que foi utilizada a linguagem de programação Julia com o objetivo de otimizar o código e possibilitar a realização de novos testes. Sendo assim, esse trabalho visa aprofundar os estudos realizados em Sterza, Carreira e Brandi (2019) [7] sendo que os resultados foram comparados com Ghia, Ghia e Shin (1982) [4].

¹gtomiasi@gmail.com

²rafael.sterza@usp.br

³analice.brandi@unesp.br

2 Formulação Matemática

As equações que modelam o escoamento forçado pelo movimento da tampa de uma caixa são descritas em termos das equações de Navier-Stokes. Neste trabalho optou-se pela utilização da formulação corrente-vorticidade para a resolução desse sistema de equações, pois possui a vantagem de não utilizar a pressão na resolução [5] (se for necessário o cálculo da pressão, pode ser realizado posteriormente). Dessa forma, define-se vorticidade ω_z como:

$$\omega_z = -\nabla \times \mathbf{u} \quad \rightarrow \quad \omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1)$$

onde $\mathbf{u} = (u, v)$ é o vetor velocidade e u e v são as velocidades na direção longitudinal e normal, respectivamente. Assim, pode-se obter a equação de transporte de vorticidade e, para isso, é necessário realizar algumas manipulações algébricas na equação de Navier-Stokes nas duas direções do problema: x e y . A equação de transporte de vorticidade é dada por:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

onde Re é o número de Reynolds. A equação da continuidade pode ser satisfeita pelo campo de velocidades se definir uma função linha de corrente ψ . A equação (3) representa a sua definição:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3)$$

Utilizando a definição da função linha de corrente e a da vorticidade, obtém-se uma equação de Poisson para essas variáveis, isto é,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega_z. \quad (4)$$

Através das equações (2) – (4) obtém-se a formulação corrente-vorticidade que permite resolver o problema da cavidade. As condições iniciais e de contorno são

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, 0) &= \mathbf{0} \quad \text{em} \quad \Omega, & \mathbf{u}(x, y, t) &= \mathbf{0} \quad \text{em} \quad \partial\Omega_1 \times [0, t], \\ u(x, y, t) &= U \quad \text{e} \quad v(x, y, t) &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega_2 \times [0, t]. \end{aligned} \quad (5)$$

O domínio de simulação é Ω , a tampa é a fronteira $\partial\Omega_2$ e a caixa é a fronteira $\partial\Omega_1$. O escoamento em uma cavidade se caracteriza pela presença de uma grande zona de recirculação central e outras, menores, nos cantos inferiores. O tamanho dessas regiões, bem como sua localização, variam com o número de Reynolds do escoamento [3].

3 Formulação Numérica

Nesta seção, são apresentados os métodos numéricos utilizados para a resolução e discretização do problema, junto com as estratégias para a obtenção de uma solução aproximada.

3.1 Discretização da Equação de Transporte de Vorticidade

Utilizando um método explícito para a discretização da derivada temporal da equação (2) e métodos de segunda ordem para as derivadas espaciais, obtém-se,

$$\omega_{i,j}^{t+1} = \delta_t (A\omega_{i,j}^t + B\omega_{i-1,j}^t + C\omega_{i+1,j}^t + D\omega_{i,j-1}^t + E\omega_{i,j+1}^t), \quad (6)$$

onde $A = \frac{1}{\delta_t} - \frac{2}{Re} \left(\frac{1}{\delta_x^2} + \frac{1}{\delta_y^2} \right)$, $B = \frac{1}{Re\delta_x^2} - \frac{u_{i,j}}{2\delta_x}$, $C = \frac{1}{Re\delta_x^2} + \frac{u_{i,j}}{2\delta_x}$, $D = \frac{1}{Re\delta_y^2} + \frac{v_{i,j}}{2\delta_y}$ e $E = \frac{1}{Re\delta_y^2} + \frac{v_{i,j}}{2\delta_y}$, sendo que δ_t , δ_x e δ_y referem-se ao espaçamento utilizado no tempo t e nas direções x e y , respectivamente. Com a vorticidade calculada no interior do domínio, utiliza-se a equação (4) para obter a corrente.

3.2 Aproximação da Equação de Poisson: Cálculo da Vorticidade ω_z

3.2.1 Método de Diferenças Finitas de 2ª Ordem

A primeira abordagem para a resolução da equação de Poisson é utilizando um método clássico de diferenças finitas, onde emprega-se uma aproximação de segunda ordem para a aproximação das derivadas. Pode-se obter detalhes da discretização em Cuminato e Meneguette Junior (2013) [1] e Fortuna (2012) [3]. Obtido o valor de ψ , é possível encontrar as velocidades u e v através da equação (3), neste caso também utilizou-se uma aproximação de segunda ordem para a aproximação das velocidades [2].

3.2.2 Método de Diferenças Finitas Compactas de 4ª Ordem

A equação (4) pode ser resolvida pelo método de diferenças finitas compactas de quarta ordem, que após a discretização [6, 8], resulta em

$$\frac{1}{6}(\psi_{i+1,j+1} + \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-1,j-1}) + \frac{2}{3}(\psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j} + \psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1}) - \frac{10}{3}\psi_{i,j} = -\frac{h^2}{12}(\omega_{i-1,j} + \omega_{i+1,j} + \omega_{i,j-1} + \omega_{i,j+1} + 8\omega_{i,j}). \quad (7)$$

Obtido o valor de ψ , é possível encontrar as velocidades u e v através da equação (3), neste caso também utilizou-se uma aproximação de quarta ordem para a aproximação das velocidades [2] e, além disso, foi necessária a aplicação de uma aproximação descentrada para o segundo e penúltimo pontos.

4 Resultados Numéricos

Esta seção apresenta os resultados numéricos obtidos através do código Julia para o problema da cavidade com tampa móvel. Os parâmetros utilizados foram: $Re = 100, 1000$ e 10000 , $\delta_x = \delta_y = \frac{1}{128}$ e $\delta_t = 0,001$. Os resultados referentes ao valor de \mathbf{u} no centro geométrico (Figuras 1 e 2) foram comparados com Ghia, Ghia e Shin (1982) [4], enquanto as linhas de corrente foram comparadas qualitativamente com os resultados da mesma referência.

As Figuras 1 e 2 mostram a diferença dos métodos quando se compara cada componente da velocidade com as obtidas por Ghia, Ghia e Shin (1982) [4]. Para números de Reynolds menores, os métodos numéricos possuem resultados semelhantes, no entanto, foi observada uma divergência notável para $Re = 10000$. Apesar do método de segunda ordem inesperadamente render valores mais próximos do resultado de referência, ambos os métodos apresentam uma curva divergente semelhante. Uma hipótese para explicar esse desvio é o fenômeno da instabilidade numérica, observado em métodos de diferenças finitas explícitas para passos temporais que não estejam dentro de um determinado intervalo, chamado intervalo de estabilidade, sendo possivelmente necessário diminuir o valor de δt para obter um resultado adequado[1][3]. Para a linha de corrente, apresentada na Figura 3, nota-se um comportamento semelhante ao que se encontra na literatura, com a

presença de três zonas de recirculação para os valores de Reynolds menores. Para $Re = 10000$ nota-se outras zonas de recirculação sendo formadas.

Para $Re = 100$, o código foi executado em 14s e 10s para os métodos de segunda e quarta ordem, respectivamente; para $Re = 1000$, executou-se em 58s e 39s; e, por fim, para $Re = 10000$, o tempo de simulação foi 519s e 298s. A principal otimização aplicada para redução do tempo de execução foi o armazenamento da fatoração da matriz esparsa A , utilizada para calcular o valor da função corrente através da resolução do sistema linear esparsa $A\psi = -\omega$ (equação de Poisson discretizada). Isso é possível pois a matriz não se altera durante a execução do método. Essa otimização é aplicada a ambos os métodos, diferindo apenas na fatoração utilizada para cada um deles. No caso do método de segunda ordem, é utilizada uma fatoração $A = LU$, enquanto no método de quarta ordem é utilizada uma fatoração $A = LDL^T$. O método de diferenças finitas compactas de quarta ordem apresenta melhor desempenho pois a matriz utilizada para resolução do sistema linear é simétrica. A fatoração LDL^T quando aplicada a matrizes simétricas permite tirar proveito da simetria da matriz fatorizada para economizar recursos computacionais, aprimorando o tempo de execução observado através da otimização do uso de memória e processamento.

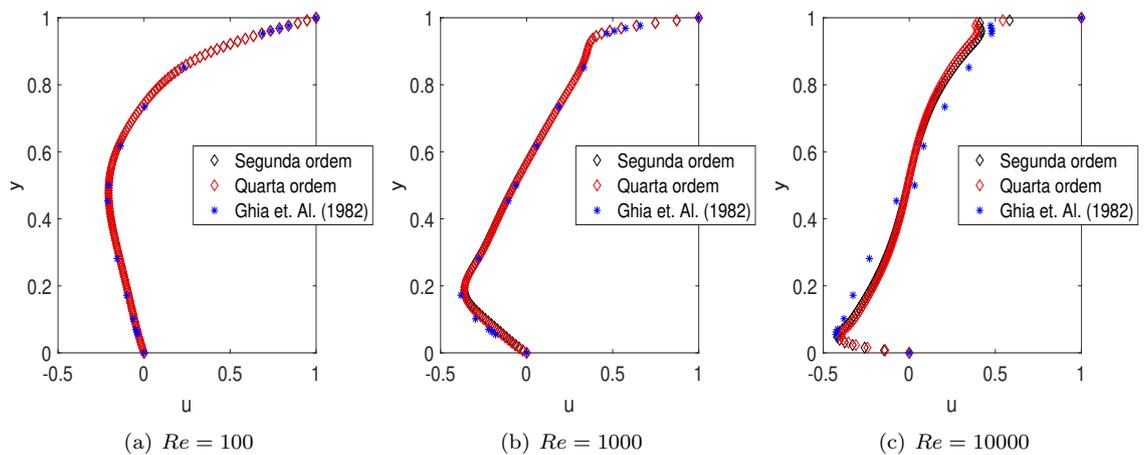


Figura 1: Comparação da velocidade u no centro geométrico com Ghia, Ghia e Shin (1982) [4].

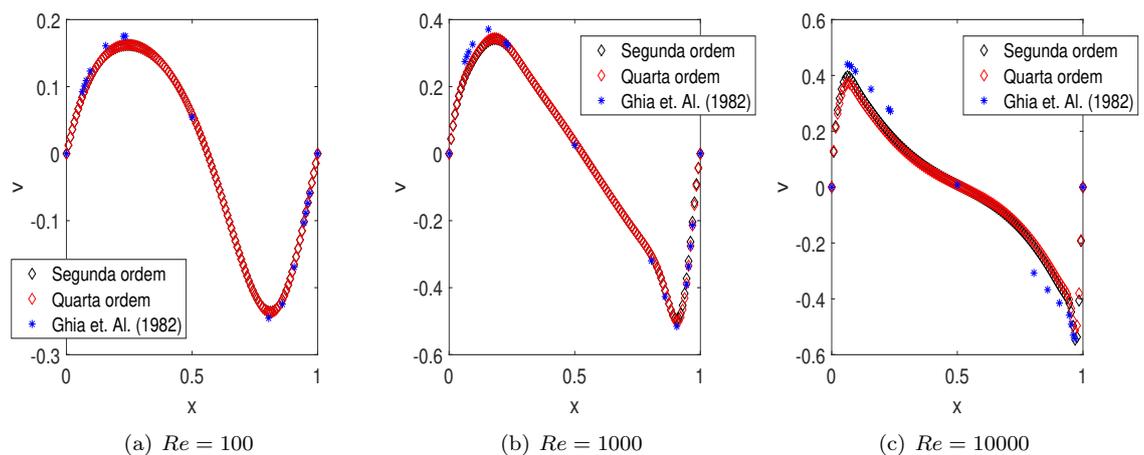


Figura 2: Comparação da velocidade v no centro geométrico com Ghia, Ghia e Shin (1982) [4].

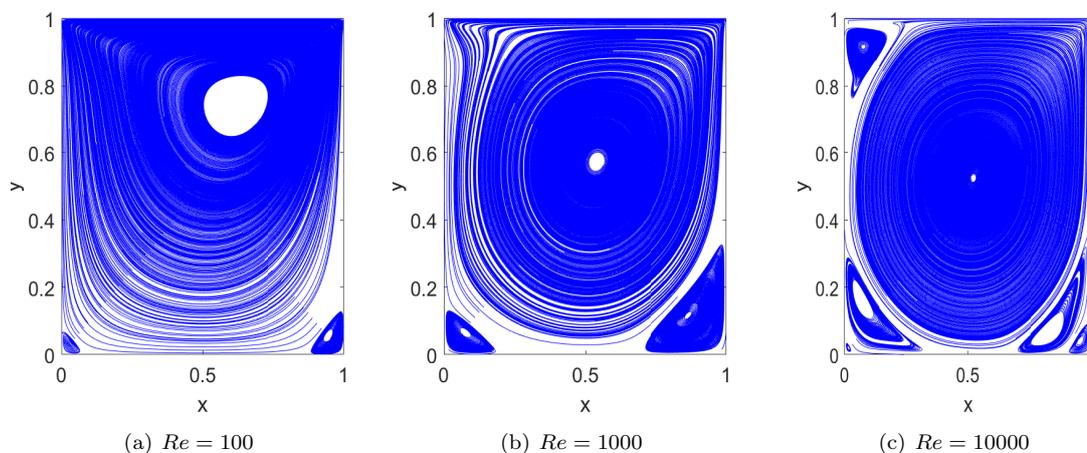


Figura 3: Linhas de corrente utilizando o método de segunda ordem.

A linguagem de programação Julia também permite outras formas de otimização, tal como um controle maior sobre o uso de memória, reduzindo a quantidade de alocações realizadas a cada iteração, tal medida tem um impacto menor, mas acaba por ter um impacto no tempo de execução em malhas mais finas. O método de segunda ordem faz uso da decomposição LU, visto que a matriz esparsa utilizada não é simétrica, enquanto o método de quarta ordem faz uso de uma fatoração LDL^t , utilizada em casos que a matriz fatorada é simétrica.

5 Considerações Finais

Os resultados obtidos mostraram que os códigos precisam ser explorados para os valores de Reynolds maiores, uma vez que os resultados numéricos começam a se comportar com maiores diferenças entre si e, além disso, nota-se que os resultados não estão mais semelhantes ao encontrado na literatura [4]. A otimização realizada fez com que o código fosse executado com um menor tempo computacional e, diante disso, permite-se realizar diferentes testes, uma vez que ao aumentar o número de Reynolds o código levou mais tempo para ser executado. Diante ao exposto, conclui-se que a otimização do código permite uma exploração mais eficaz do problema, seja em relação ao método utilizado ou para as aproximações.

Agradecimentos

Agradecemos ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) pelo auxílio financeiro no desenvolvimento deste trabalho.

Referências

- [1] J. A. Cuminato e M. Meneguette Junior. **Discretização de equações diferenciais parciais**. 2013.
- [2] D. H. Eberly. “Derivative Approximation by Finite Differences”. Em: Magic Software, 2016.
- [3] A. O. Fortuna. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos**. Edusp, 2012.

- [4] U. Ghia, K. N. Ghia e C. T. Shin. “High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method”. Em: **Journal of Computational Physics** 48.3 (1982), pp. 387–411. DOI: 10.1016/0021-9991(82)90058-4.
- [5] J. W. Goodrich e W. Y. Sox. “Time-dependent viscous incompressible Navier-Stokes equations: The finite difference Galerkin formulation and streamfunction algorithms”. Em: **Journal of Computational Physics** 84.1 (1989), pp. 207–241. DOI: 10.1016/0021-9991(89)90188-5.
- [6] F. M. Okoro e E. A. Owoloko. “Compact Finite Difference Scheme for Poisson Equation using Direct Solver”. Em: **Journal of Mathematics and Technology** (ago. de 2010), pp. 2078–257.
- [7] R. L. Sterza, B. L. Carreira e A. C. Brandi. “Solução numérica da equação de Poisson no problema da cavidade com tampa móvel”. Em: **CQD - Revista Eletrônica Paulista de Matemática** 17 (fev. de 2020). DOI: 10.21167/cqdv0117ermac202023169664r1sblcacb227238.
- [8] R. L. Sterza et al. “Análise da ordem de acurácia do erro em soluções numéricas da equação de Poisson”. Em: **CQD - Revista Eletrônica Paulista de Matemática** 10ic (dez. de 2017), pp. 01–09. DOI: 10.21167/cqdv0110ermac1c201723169664r1sblclbbacb0109.