Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Reconstrução de condutividade térmica ortotrópica com método pseudoespectral de Chebyshev e aplicações

Everton Boos[1] Fermín, S. V. Bazán[2]
UFSC, Florianópolis, SC
Vanda M. Luchesi[3]
UFU, Ituiutaba, MG

Resumo. Em trabalhos recentes, estudamos um problema de condução de calor em um domínio retangular modelado por uma EDP com condições de fronteira mistas e condição inicial, e envolvendo parâmetros tais como capacidade térmica, condutividade, entre outros. Conhecer a condutividade térmica de um material é assunto de importância em processos industriais e tem se tornado um tópico ativo de pesquisa das últimas décadas. Fornecemos uma forma de discretizar o modelo original através do método pseudo-espectral de Chebyshev nas variáveis espaciais, pelas suas boas propriedades de aproximação com baixo custo numérico, e a regra do trapézio na variável temporal, pela segunda ordem de convergência e estabilidade absoluta. O problema inverso de aproximar a condutividade térmica a partir de dados capturados da temperatura é então elaborado como um problema de mínimos quadrados não lineares, que faz uso recorrente da discretização pregressa. A minimização é feita através de uma versão do método de Levenberg-Marquardt (LMM) com matrizes de *scaling* singular escolhidas para representarem operadores de derivação discretos de primeira e segunda ordens, com a intenção de introduzir suavidade nos iterados construídos. A motivação para tal vem de bons resultados de técnicas similares em problemas lineares através, por exemplo, da regularização de Tikhonov. Para amenizar o efeito de imprecisões nos dados de temperatura fornecidos, o princípio da discrepância (DP) é utilizado como critério de parada. Resultados numéricos sintéticos e para dados experimentais ilustram o potencial da técnica proposta, com reconstruções de qualidade a um baixo custo operacional, mesmo em situações com medições restritas.

Palavras-chave. Problemas inversos. Métodos iterativos. Condutividade térmica. Método pseudo-espectral de Chebyshev. Método de Levenberg-Marquardt com *scaling* singular. Princípio da discrepância.

1 Introdução

O problema de reconstruir a condutividade térmica é um tema de variadas aplicações na ciência e especialmente engenharia. Conhecer a condutividade térmica de um material tem enorme impacto em aplicações industriais, por exemplo, indo de componentes estruturais em construções ao desenvolvimento de aeronaves e pesquisa espacial, uma vez que são raros os processos sem ocorrência de interações térmicas. Alguns exemplos envolvem a determinação de taxa de desgaste de ferramentas, qualidade de produtos, aplicações em refrigeração, motores e painéis solares e interação com outros materiais, para citar alguns [2, 12, 14, 18]. Outros usos podem ser encontradas dependendo da área de estudo, como é o caso em imagens médicas (tomografia é um exemplo

[1]everton.boos@ufsc.br
[2]fermin.bazan@ufsc.br
[3]vanda.luchesi@ufu.br

direto) em que a função de interesse é vista como condutividade elétrica, então trocando também temperatura por potencial elétrico [1].

Matematicamente, estamos interessados na recuperação da condutividade térmica de um material sólido de duas dimensões cuja dinâmica de transferência de calor é descrita pelo problema de valor de contorno abaixo. Considere o domínio $\Omega \times [0, t_f]$, $t_f > 0$, com $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2) \subseteq \mathbb{R}^2$, $l_1, l_2 > 0$, e a equação diferencial parcial que modela condução de calor,

$$C(x,y)\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) = \nabla \cdot [K(x,y)\nabla u(x,y,t)] - q(x,y)u(x,y,t) + g(x,y,t), \tag{1.1}$$

no cilindro $\Omega \times (0, t_f]$. As variáveis envolvidas são *capacidade térmica* $C(x,y) > 0$, *termo de reação* $q(x,y) \geq 0$, *termo fonte* $g(x,y,t)$, *função de temperatura* $u(x,y,t)$ e *condutividade térmica* (ortotrópica), com dependência espacial,

$$K(x,y) = \begin{bmatrix} k_{11}(x,y) & 0 \\ 0 & k_{22}(x,y) \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

contínua, com $k_{11}, k_{22} > 0$. Completamos o modelo com as condições de fronteira

$$-k_{11}(0,y)\frac{\partial u}{\partial x}(0,y,t) + h_1(y)(u(0,y,t) - f_1(y,t)) = 0, \quad \text{em} \quad x = 0,\ y \in (0, l_2), \tag{1.3}$$

$$k_{11}(l_1,y)\frac{\partial u}{\partial x}(l_1,y,t) + h_2(y)(u(l_1,y,t) - f_2(y,t)) = 0, \quad \text{em} \quad x = l_1,\ y \in (0, l_2), \tag{1.4}$$

$$-k_{22}(x,0)\frac{\partial u}{\partial y}(x,0,t) + h_3(x)(u(x,0,t) - f_3(x,t)) = 0, \quad \text{em} \quad y = 0,\ x \in (0, l_1), \tag{1.5}$$

$$k_{22}(x,l_2)\frac{\partial u}{\partial y}(x,l_2,t) + h_4(x)(u(x,l_2,t) - f_4(x,t)) = 0, \quad \text{em} \quad y = l_2,\ x \in (0, l_1), \tag{1.6}$$

para todo $t \in (0, t_f]$, e condição inicial

$$u(x,y,0) = u_0(x,y) \quad \text{na região } \Omega, \tag{1.7}$$

com h_i, $i = 1, \ldots, 4$, conhecidas como *funções de transferência de calor*, f_i, $i = 1, \ldots, 4$, *funções de fluxo de calor* e $u_0(x,y)$ é a *temperatura inicial*. O objetivo central desta parte do trabalho [6, 7] é recuperar aproximações para a condutividade ortotrópica $K(x,y)$ baseadas em informações/medidas da temperatura e considerando disponíveis todos os outros coeficientes e funções envolvidas no modelo.

Diversos artigos descrevem métodos para lidar com a recuperação da condutividade, cada um envolvendo estratégias numéricas específicas e com as suas particularidades nos aspectos teóricos. Exemplos envolvem amplas técnicas variando do método de diferenças finitas ao método de elementos de fronteira, que omitimos, por brevidade. Para maior aprofundamento, citamos, e.g. [1, 9, 15, 16, 19].

Neste contexto, nossa proposta consiste em desenvolver uma estratégia alternativa em duas partes: a primeira, baseada no método pseudo-espectral de Chebyshev (CPM) [8, 11] para discretizar o modelo (1.1)–(1.7); a segunda parte é composta da aplicação de uma versão do método de Levenberg-Marquardt com *scaling* singular (LMMSS) para propriamente recuperar a condutividade através de um problema inverso que faz uso da discretização anterior. CPM é introduzido aqui para lidar com o chamado *problema direto*, que consiste na determinação da temperatura u dados os outros parâmetros do modelo, inclusive a condutividade. Este método foi escolhido com foco no claro processo de discretização e boas propriedades de convergência, normalmente exigindo baixo esforço computacional para produzir resultados de qualidade. Neste sentido, vale reforçar

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0087

que a ordem de convergência de CPM chega a ser exponencial desde que a solução procurada seja ela mesma suficientemente suave [8].

O material apresentado aqui é uma parte do resultado de estudo desenvolvido em Boos, Luchesi e Bazán [7] e Boos, Bazán e Luchesi [6], o primeiro publicado e o segundo em revisão. Ambos os trabalhos lidam com o problema de reconstrução como relatado acima, com a observação de que o segundo trabalho [6] apresenta modificações e aperfeiçoamentos à discretização proposta no artigo anterior. Além disso, ampliamos a técnica para problemas com restrições de medição, uma situação que surge em problemas práticos por aspectos técnicos restritivos.

2 Problema direto

No tratamento numérico de problemas inversos não lineares através de métodos iterativos, o problema direto tem que ser resolvido muitas vezes e, portanto, uma técnica eficiente para fazê-lo é essencial para termos sucesso no método inverso escolhido. De forma grosseira, a estratégia se baseia em utilizar CPM para produzir aproximações às derivadas espaciais através da matriz de diferenciação de Chebyshev, transformando o modelo original em um sistema de EDOs dependente do tempo para o qual diversos métodos existem. Interesse nesta abordagem surgiu a partir da crescente percepção de que EDPs podem ser solucionadas com alta precisão e baixo custo operacional quando comparado com métodos baseados em diferenças finitas ou elementos finitos, por exemplo; adicionalmente, esta abordagem tem sido aplicada com sucesso na resolução de problemas diretos e inversos em problemas de condução de calor ainda recentemente, veja, e.g. [3, 5, 13].

Para simplificar a exposição, iniciamos transformando o domínio espacial $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$ em (1.1)–(1.7) no quadrado unitário. Os motivos se tornarão claros a seguir durante o processo de discretização. Fazendo desta forma e mantendo as mesmas notações que no modelo original (para evitar sobrecarga de definições), o modelo transformado se torna

$$c(x,y)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{l_1^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{11}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{l_2^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(k_{22}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) - q(x,y)u(x,y,t) + g(x,y,t), \tag{2.1}$$

para $(x,y,t) \in (0,1) \times (0,1) \times [0,t_f]$, e

$$-\frac{1}{l_1}k_{11}(0,y)\frac{\partial u}{\partial x}(0,y,t) + h_1(y)(u(0,y,t) - f_1(y,t)) = 0, \quad \text{em} \quad x = 0,\ y \in (0,1), \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{l_1}k_{11}(1,y)\frac{\partial u}{\partial x}(l_1,y,t) + h_2(y)(u(1,y,t) - f_2(y,t)) = 0, \quad \text{em} \quad x = 1,\ y \in (0,1), \tag{2.3}$$

$$-\frac{1}{l_2}k_{22}(x,0)\frac{\partial u}{\partial y}(x,0,t) + h_3(x)(u(x,0,t) - f_3(x,t)) = 0, \quad \text{em} \quad y = 0,\ x \in (0,1), \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{l_2}k_{22}(x,1)\frac{\partial u}{\partial y}(x,1,t) + h_4(x)(u(x,1,t) - f_4(x,t)) = 0, \quad \text{em} \quad y = 1,\ x \in (0,1), \tag{2.5}$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y) \quad \text{em} \quad [0,1] \times [0,1], \tag{2.6}$$

em que $t \in (0, t_f]$ nas condições de fronteira (2.2)-(2.5).

No método pseudo-espectral de Chebyshev, derivadas espaciais são aproximadas em uma malha consistindo de $(n+1) \times (n+1)$ pontos em $[0,1] \times [0,1]$ baseados em $(n+1)$ pontos de Chebyshev Gauss-Lobatto nas direções horizontal e vertical, respectivamente, definidos por

$$x_i = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right)\right], \quad y_j = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)\right], \quad i,j = 0,1,\ldots,n, \tag{2.7}$$

cuja característica de maior concentração nos extremos do domínio evita, por exemplo, o conhecido fenômeno de Runge. A partir disto, as aproximações às derivadas são baseadas em um produto matriz-vetor da matriz de diferenciação de Chebyshev com o vetor de valores funcionais na malha. Desta forma, a EDP é transformada em um sistema de EDOs dependente da variável temporal apenas, que pode ser resolvido de diversas formas, como veremos adiante. Daqui em diante, sempre assumiremos que os pontos da malha estão numerados seguindo a chamada *ordem lexicográfica*, isto é, para cada ponto da malha existe um único número positivo definido por

$$\ell = i + j(n+1) + 1, \quad 0 \leq i, j \leq n, \tag{2.8}$$

que representa os pontos da malha consecutivamente da esquerda para a direita, de baixo para cima. Rotular os pontos desta forma permite que aproximações para $u(x_i, y_j, t)$ que estamos procurando podem ser armazenadas em um longo vetor com $(n+1)^2$ entradas cujos componentes são indexados por ℓ.

2.1 Discretização espacial e problema semidiscreto

Para construir aproximações às derivadas espaciais usando CPM, denote por $D \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ a matriz de diferenciação de Chebyshev. Para a conveniência do leitor não familiar com CPM e simplificação da exposição, observe que se $\mathsf{f} \in \mathbb{R}^{n+1}$ é um vetor contendo valores funcionais $f(x_i)$ ao longo da malha de Chebyshev em 1D, então as derivadas $f'(x_i)$ são aproximadas por um vetor contendo valores de derivada da forma

$$[f'(x_0), f'(x_1), \ldots, f'(x_n)]^T \approx D\mathsf{f}.$$

Usando de tal estratégia nas derivadas espaciais e da enumeração lexicográfica, obtemos uma versão semidiscreta do modelo (2.1)–(2.6) obtida através de CPM no agora problema de valor inicial (PVI) linear definido por

$$\begin{cases} \mathbf{C}\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{S}(t), \quad t > 0 \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{u}^0 \end{cases}, \tag{2.9}$$

em que $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{(n+1)^2}$ é um vetor em blocos dependente do tempo com componentes $\mathbf{v}_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, que servem como aproximações para $\mathbf{u}_i$; $\mathbf{u}^0$ contém os valores da condição inicial (2.6) u_0 ao longo da malha; $\mathbf{A}$ contém termos da discretização espacial, além do termo de reação q, e $\mathbf{S}(t)$ inclui valores na fronteira e termos independentes. Além disso, $\mathbf{C}$ é matriz diagonais contendo os valores de $c(x, y)$ ao longo da malha de Chebyshev.

O modelo semidiscreto (2.9) é, aqui, manipulado através do método de Crank-Nicolson (CN) [10], dadas as propriedades de estabilidade e boa taxa de convergência (quadrática). Seja $N > 0$ um número natural e considere a discretização temporal na forma $t_i = i\Delta t$, para $i = 0, 1, \ldots, N$, em que $\Delta t = t_f/N$ é o passo no tempo, de modo que construímos uma malha uniformemente espaçada em $[0, t_f]$. Então, CN gera aproximações à solução no tempo t_i, denotada por $\mathbf{v}^{(i)}$, definidas implicitamente por

$$\mathbf{C}\mathbf{v}^{(i+1)} = \mathbf{C}\mathbf{v}^{(i)} + \frac{\Delta t}{2}\left(\mathbf{A}\mathbf{v}^{(i)} + \mathbf{S}(t_i) + \mathbf{A}\mathbf{v}^{(i+1)} + \mathbf{S}(t_{i+1})\right), \quad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

A equação acima pode ser reescrita como

$$\mathbf{A}_m\mathbf{v}^{(i+1)} = \mathbf{A}_p\mathbf{v}^{(i)} + \frac{\Delta t}{2}\left[\mathbf{S}(t_i) + \mathbf{S}(t_{i+1})\right], \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.10}$$

em que $\mathbf{A}_m := \mathbf{C} - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}_p := \mathbf{C} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{A}$. Consequentemente, para calcularmos soluções aproximadas em cada passo no tempo, precisamos resolver o sistema de equações lineares (2.10), preferencialmente da forma mais eficiente possível. Uma forma de fazê-lo é explorando a estrutura esparsa de $\mathbf{A}_m$ através de alguma fatoração matricial como LU ou QR, por exemplo, e utilizar os fatores para resolver o sistema. Neste caso, a fatoração é calculada apenas uma vez no início das iterações CN e se mantém ao longo de todo o processo, uma vez que $\mathbf{A}_m$ é fixa. Mais precisamente, $\mathbf{A}_m$ muda com $\mathbf{A}$, que por sua vez apenas varia se mudarmos os valores da condutividade, únicos cada vez que resolvemos o problema direto.

3 Problema inverso

Baseado no método para o problema direto desenvolvido na seção anterior, vamos agora tratar do problema inverso de estimar as condutividades k_{11} e k_{22} a partir de medidas de temperatura fornecidas. Para o tratamento deste problema, assumimos que as variáveis (valores da condutividade na malha) estão organizados em um vetor em blocos

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{11} \\ \mathbf{k}^{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2(n+1)^2}, \tag{3.1}$$

cada bloco disposto em ordem lexicográfica. Desta forma, o objetivo agora é determinar valores de condutividade $\mathbf{k}$ a partir de medidas de temperatura $\widetilde{\mathsf{u}} = \mathsf{u} + e$, em que e denota um termo de perturbação desconhecido, proveniente de erros de medição, imprecisões, arredondamentos, por exemplo, e u é um vetor que contém valores exatos de temperatura na malha de Chebyshev nos tempos $t_k,\ k = 1, \ldots, N$,

$$\mathsf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(t_N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N(n+1)^2}, \tag{3.2}$$

em que $\mathbf{u}(t_k) \equiv \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{(n+1)^2}$ tem entradas $u_\ell^{(t_k)} \doteq u(x_i, y_j, t_q)$ com ℓ definido em (2.8) para que (x_i, y_j) sigam a ordem lexicográfica. Comentários similares se encaixam ao vetor $\widetilde{\mathsf{u}}$ quanto à ordenação das entradas.

Na prática, como não temos acesso à função exata de temperatura, aproximamos os seus valores através da solução do problema direto. Desta forma, seguindo a notação de (3.2), definimos por $\mathsf{u}(\mathbf{k})$ o vetor que acomoda os valores obtidos para temperatura através do problema direto para dado $\mathbf{k}$. Formulamos finalmente o problema inverso de estimar as condutividades através da minimização do funcional de mínimos quadrados não linear

$$\phi(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\|\mathsf{u}(\mathbf{k}) - \widetilde{\mathsf{u}}\|_2^2 \doteq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} |u(x_i, y_j, t_k, \mathbf{k}) - \widetilde{u}(x_i, y_j, t_k)|^2, \tag{3.3}$$

em que $\mathsf{u}(x_i, y_j, t_k, \mathbf{k})$ resolve o problema direto para dados k_{11} e k_{22} e, portanto, estamos em busca que uma solução

$$\mathbf{k}^* = \underset{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^{2(n+1)^2}}{\operatorname{argmin}}\ \phi(\mathbf{k}).$$

Neste trabalho, resolvemos (3.3) através de LMMSS, com a matriz de *scaling* a ser escolhida de acordo com o exemplo considerado, introduzindo operadores de primeira e segunda derivadas discretas. Resultados que mostram a efetividade de tal método podem ser encontrados em [4, 13], mas especialmente nos artigos gerados por este trabalho [6, 7].

Exemplos numéricos mostram que o método proposto é capaz de construir boas aproximações à condutividade, em diferentes cenários, seja com ruído nos dados e/ou restrições de medição (como pode ocorrer na prática). Para amenizar o efeito do ruído, as iterações LMMSS são paradas através de do princípio da discrepância [17] (DP), de modo a produzir resultados competitivos e em consonância com o nível de perturbação presente. Um exemplo baseado em dados experimentais capturados em [14] é também considerado, com base em um problema de fresamento de face em aço AISI 4340 com medidas em apenas 12 pontos (sensores). Apesar das dificuldades inerentes à obtenção dos dados e tratamento dos mesmos, a aplicação de LMMSS se mostra viável e constrói aproximações coerentes com o esperado da teoria relacionada, com resultados superiores aos fornecidos pelo comparativo com a rotina lsqnonlin.

4 Considerações finais

Abordamos o estudo de um problema de condução de calor em duas dimensões com inúmeras aplicações na ciência e engenharia, em especial industriais. O problema é descrito no ambiente contínuo como uma EDP com condições de fronteira de Robin e condição inicial, presente em diversas aplicações em áreas que lidam com interações térmicas, embora as mesmas equações sirvam também para descrever problemas com potencial elétrico. A discretização proposta se utiliza do método pseudo-espectral de Chebyshev (CPM) para lidar com as derivadas espaciais e o método de Crank-Nicolson (CN) na variável temporal. CPM tem importância central na técnica, escolhido principalmente pelas boas qualidades teóricas nas aproximações mesmo com um número relativamente pequeno de pontos na malha espacial.

Estes dois métodos formam a base do *solver* ao problema direto de reconstruir valores de temperatura tendo conhecimento dos demais parâmetros, incluindo a condutividade. O problema inverso é então formulado através da minimização de um funcional não linear com base no problema direto e em valores de temperatura provenientes, por exemplo, de experimentos físicos. Como forma de atestar as capacidades da técnica desenvolvida, utilizamos LMM com matrizes de *scaling* representando versões discretas de operadores de derivação de primeira e segunda ordens, para resolver o problema de mínimos quadrados formulado. Em conjunto com experimentos numéricos, concluímos que o método proposto é eficiente e capaz de produzir boas reconstruções a despeito do aspecto mal posto dos problemas, mesmo na presença de ruído e em ambientes com medidas incompletas, com aplicação válida em problemas reais.

Agradecimentos

Às agências de fomento, pelo apoio financeiro. E.B. recebeu suporte de FAPESC, outorgas números 88887.178114/2018-00 e 2023TR000360 (Chamada Pública FAPESC Nº 38/2022). F.S.V.B. e V.M.L. receberam suporte de CNPq, sob números 308523/2017-2 e 510504/2010-8, respectivamente.

Referências

[1] Giovanni Alessandrini, Maarten V. de Hoop e Romina Gaburro. “Uniqueness for the electrostatic inverse boundary value problem with piecewise constant anisotropic conductivities”. Em: **Inverse problems** 33.12 (2017), p. 125013.

[2] Y. Altintas. **Manufacturing Automation**. Cambridge University Press, 2000.

[3] F. S. V. Bazán. “Chebyshev pseudospectral method for wave equation with absorbing boundary conditions that does not use a first order hyperbolic system”. Em: **Mathematics and Computers in Simulation** 80.11 (2010), pp. 2124–2133.

[4] F. S. V. Bazán, L. Bedin e L. S. Borges. “Space-dependent perfusion coefficient estimation in a 2D bioheat transfer problem”. Em: **Computer Physics Communications** 214 (2017), pp. 18–30.

[5] F. S. V. Bazán, L. Bedin e F. Bozzoli. “New methods for numerical estimation of convective heat transfer coefficient in circular ducts”. Em: **International Journal of Thermal Sciences** 139 (2019), pp. 387–402.

[6] E. Boos, F. S. V. Bazán e V. M. Luchesi. “Thermal conductivity reconstruction method with application in a face milling operation”. Em: **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow** 33.8 (2023), pp. 3025–3055. DOI: 10.1108/HFF-12-2022-0720.

[7] E. Boos, V. M. Luchesi e F. S. V. Bazán. “Chebyshev pseudospectral method in the reconstruction of orthotropic conductivity”. Em: **Inverse Problems in Science and Engineering** 29.1 (2020), pp. 681–711.

[8] C. Canuto, M. Y. Hussaini e A. Quarteroni. **Spectral methods in fluid dynamics**. 1ª ed. Springer Series in Computational Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

[9] K. Cao, D. Lesnic e M. J. Colaço. “Determination of thermal conductivity of inhomogeneous orthotropic materials from temperature measurements”. Em: **Inverse Problems in Science and Engineering** 27.10 (2019), pp. 1372–1398.

[10] J. Crank e P. Nicolson. “A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type”. Em: **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society** 43.1 (1947), pp. 50–67.

[11] D. Gottlieb e S. A. Orzag. **Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications**. Society for Industrial e Applied Mathematics, 1977.

[12] Z. Hou e R. Komanduri. “General solutions for stationary/moving plane heat source problems in manufacturing and tribology”. Em: **International Journal of Heat and Mass Transfer** 43 (2000), pp. 1679–1698.

[13] Mansur I. Ismailov, F. S. V. Bazán e L. Bedin. “Time-dependent perfusion coefficient estimation in a bioheat transfer problem”. Em: **Computer Physics Communications** 230 (2018), pp. 50–58.

[14] V. M. Luchesi e R. Coelho. “An inverse method to estimate the moving heat source in machining process”. Em: **Applied Thermal Engineering** 45 (2012), pp. 64–78.

[15] Mohammed Shuker Mahmood e D. Lesnic. “Identification of conductivity in inhomogeneous orthotropic media”. Em: **International Journal of Numerical Method for Heat & Fluid Flow** 29.1 (2019), pp. 165–183.

[16] N. S. Mera et al. “An iterative BEM for the Cauchy steady state heat conduction problem in an anisotropic medium with unknown thermal conductivity tensor”. Em: **Inverse Problems in Engineering** 8.6 (2000), pp. 579–607.

[17] V. A. Morozov. **Regularization Methods for Solving Incorrectly Posed Problems**. Springer, 1984.

[18] M. Necati Özişik. **Heat Conduction**. 2ª ed. John Wiley & Sons, 1993.

[19] Jayantha Pasdunkorale e Ian W. Turner. “A second order finite volume technique for simulating transport in anisotropic media”. Em: **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow** 13.1 (2003), pp. 31–56.

