

# Grafos como invariantes topológicos

Catarina Mendes de Jesus Sánchez<sup>1</sup>

UFJF, Juiz de Fora, MG

Esther Sanabria-Codesal<sup>2</sup>

Universitat Politècnica de València, Valencia, Espanha

**Resumo.** Neste trabalho apresentamos vários exemplos de como os grafos podem ser vistos como invariantes de aplicações entre variedades o que os torna uma ferramenta útil para a classificação destas aplicações.

**Palavras-chave.** Grafos, Singularidades, Superfícies, Topologia

## 1 Introdução

Um problema interessante do ponto de vista topológico é a classificação de objetos. Neste estudo, nosso interesse é o estudo de aplicações estáveis entre alguns tipos particulares de variedades de dimensões baixas, tema estudado por vários autores dentro da teoria de singularidades [1, 7].

No caso global, se a variedade domínio  $M$  é fechada, o conjunto singular de uma aplicação estável consiste em uma coleção de subvariedades fechadas e disjuntas em  $M$ , que separa o conjunto regular em componentes conexas disjuntas. O par (conjunto regular, conjunto singular) pode ser associado aos vértices e arestas de um grafo, respectivamente, então podemos considerar esse grafo como um invariante topológico global da aplicação. O estudo deste ponto de vista teve seu início em [5], onde foi introduzido o grafo dual de aplicações estáveis como um invariante de aplicações de superfícies fechadas no plano. Essa técnica foi posteriormente estendida para aplicações entre outros tipos de superfícies fechadas em [2–4, 6].

Localmente, as aplicações entre superfícies podem ser vistas como aplicações do plano no plano. Em 1955, Whitney iniciou o estudo das aplicações estáveis do plano no plano, determinando que um germe de aplicação em cada ponto é equivalente a um ponto regular, um ponto de dobra ou uma cúspide [8].

Nosso principal objetivo aqui é mostrar como os grafos podem auxiliar na construção de uma aplicação estável entre duas superfícies com o conjunto singular pré-determinado.

## 2 Grafos

Um **grafo** finito no dirigido  $\mathcal{G}(V, A)$  ( $\mathcal{G}$  em forma abreviada) é um conjunto de  $V$  pontos  $\{v_1, \dots, v_V\}$  chamados **vértices** e um conjunto de  $A$  traços de curvas que conectam dos vértices chamados de **arestas**. Um **subgrafo** de  $\mathcal{G}$  é um grafo formado por um subconjunto de arestas e vértices de  $\mathcal{G}$ .

Um **caminho** sobre  $\mathcal{G}$  é uma sequência de vértices e arestas distintas  $v_1 a_1 v_2 a_2 \cdots a_k v_{k+1}$ , onde  $a_j = v_j v_{j+1}$  denota a aresta que conecta os vértices  $v_j, v_{j+1}$ . Dizemos então que  $v_j, v_{j+1}$  são **adjacentes** ou que  $a_j$  é **adjacente** a ambos vértices. Se  $v_1 = v_{k+1}$ , o caminho se chamado de **ciclo**. O número de arestas adjacentes ao vértice  $v$  é o **grau** de  $v$ .

<sup>1</sup>cmendesjesus@ufjf.br

<sup>2</sup>esanabri@mat.upv.es

Um grafo  $\mathcal{G}$  é **conexo** se existe um caminho que liga quaisquer dois dos seus vértices. Se  $\mathcal{G}$  não é conexo, cada subgrafo conexo será chamado de **componente conexa** de  $\mathcal{G}$ .

Uma **árvore** é um grafo conexo que não tem ciclos. Toda árvore  $\mathcal{T}$  com  $V$  vértices tem  $A = V - 1$  arestas, denotamos então como  $\mathcal{T}(V, A) = \mathcal{T}(A + 1, A)$  (ou  $\mathcal{T}(A)$  em forma abreviada).

Um **ciclo livre** de um grafo é qualquer ciclo com pelo menos uma aresta distinta ao resto de ciclos dele, ou seja, o número de ciclos livres é o número mínimo de arestas que podem ser retiradas do grafo para obter uma árvore com os mesmos vértices.

O primeiro **número de Betti** do grafo  $\mathcal{G}(V, A)$ , denotado por  $\beta_1(\mathcal{G}) = A - (V - 1)$ , coincide com o número de ciclos livres do grafo, e o valor  $V - A = 1 - \beta_1(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{G})$  determina um conhecido invariante topológico para grafos, a **característica de Euler**. Então, toda árvore tem característica de Euler igual a 1.

Um grafo  $\mathcal{G}$  é **bipartido** se os vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos. Nesse caso, é sempre possível atribuir sinais  $\pm$  a cada vértice de forma que cada aresta conecte vértices de sinais opostos. Uma interessante caracterização desse tipo de grafo é: “Um grafo é bipartido se, e somente se, não possui nenhum ciclo ímpar”. Então, toda árvore é um grafo bipartido.

Chamamos **grafo com pesos** nos vértices a todo grafo que tem associado um número natural em cada vértice. O número de vértices  $V$ , o número de arestas  $A$  e a soma dos pesos do grafo, que denotamos por  $W$ , será chamada de **característica do grafo** e denotada por  $C(\mathcal{G}) = (V, A, W)$ .

Dois grafos com pesos nos vértices,  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ , são ditos **isomorfos** se existe uma bijeção entre os seus conjuntos de vértices  $\psi : V(\mathcal{G}_1) \rightarrow V(\mathcal{G}_2)$ , preservando as adjacências de vértices e os correspondentes pesos, ou seja:  $uw \in A(\mathcal{G}_1)$  se, e somente se,  $\psi(u)\psi(w) \in A(\mathcal{G}_2)$ , onde  $V(\mathcal{G}_i)$  e  $A(\mathcal{G}_i)$  são, respectivamente, os vértices e as arestas do grafo  $\mathcal{G}_i$ , com  $i = 1, 2$ . É claro que se  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  são isomorfos, então  $C(\mathcal{G}_1) = C(\mathcal{G}_2)$ .

Dado  $\mathcal{G}$  um grafo bipartido com pesos e sinais nos vértices, denotamos por  $V^+$  o número de vértices com sinal  $+$  e por  $V^-$  o número de vértices com sinal  $-$ . Da mesma forma, denotamos por  $W^+$  a soma total dos pesos dos vértices com sinal  $+$  e por  $W^-$  a soma total dos pesos dos vértices com sinal  $-$ , então  $V = V^+ + V^-$  e  $W = W^+ + W^-$ .

### 3 Cirurgias de grafos com pesos

A seguir, definimos cirurgias de grafos ou somas conexas de grafos, que são ferramentas para obter novos grafos a partir de grafos mais simples.

**Definição 3.1.** *Seja  $\mathcal{G}$  um grafo com pesos nos vértices contendo as arestas  $ac$  e  $bd$  (Figura 1).*

#### 1. Cirurgia Horizontal no grafo $\mathcal{G}$ ( $S_H$ )

*Uma cirurgia horizontal entre as arestas  $ac$  e  $bd$  de  $\mathcal{G}$ , denotada por  $S_H(\mathcal{G})$ , identifica os vértices  $a$  e  $b$  no vértice  $r = a + b$  e os vértices  $c$  e  $d$  no vértice  $s = c + d$ , identificando as duas arestas  $ac$  e  $bd$  na aresta  $rs$ . Os pesos dos novos vértices  $r = a + b$  e  $s = c + d$  correspondem às somas dos pesos dos vértices  $a, b$  e de  $c, d$ , respectivamente.*

#### 2. Cirurgia Vertical no grafo $\mathcal{G}$ ( $S_V$ )

*Uma cirurgia vertical entre os vértices  $a$  e  $d$  de  $\mathcal{G}$ , denotada por  $S_V(\mathcal{G})$ , é a conexão dos dois vértices por uma aresta  $ad$ . Neste caso os pesos dos vértices não são alterados.*

**Observações 3.1.** *Grafos resultantes de cirurgias horizontais e verticais em um grafo bipartido  $\mathcal{G}$  serão também bipartidos, desde que escolhamos pares de vértices com sinais adequados: mesmos sinais na cirurgia horizontal e sinais opostos na cirurgia vertical. Além disso, se ambos pares de vértices estão na mesma componente conexa de  $\mathcal{G}$ , então  $\beta_1(S_H(\mathcal{G})) = \beta_1(S_V(\mathcal{G})) = \beta_1(\mathcal{G}) + 1$ . Porém, se os pares pertencem a componentes conexas disjuntas de  $\mathcal{G}$ , então  $\beta_1(S_H(\mathcal{G})) = \beta_1(S_V(\mathcal{G})) = \beta_1(\mathcal{G})$ .*

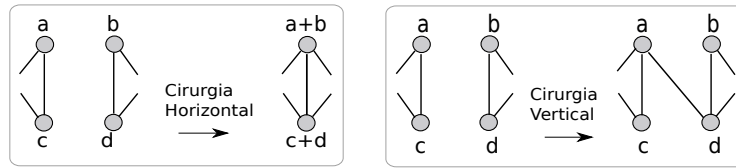


Figura 1: Cirurgia horizontal e cirurgia vertical de grafos com pesos nos vértices.

**Definição 3.2.** Sejam  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  dois grafos conexos disjuntos. Se o par de vértices  $(a, c)$  pertence a  $\mathcal{G}_1$  e o par  $(b, d)$  pertence a  $\mathcal{G}_2$ , a cirurgia horizontal entre os dois grafos será chamada de **soma conexa horizontal**, denotada por  $\mathcal{G}_1 \oplus_H \mathcal{G}_2$ , e a cirurgia vertical será chamada de **soma conexa vertical**, denotada por  $\mathcal{G}_1 \oplus_V \mathcal{G}_2$ .

**Definição 3.3.** As árvores conexas  $\mathcal{T}(A)$  com graus menores ou iguais a 2 em todos seus vértices serão denotados por  $L_A$ . Se  $A < 4$ , são chamadas **grafos básicos**.

**Lema 3.1.** Toda árvore  $\mathcal{T}(A)$  com  $A > 1$  pode ser obtida por  $A - 2$  somas conexas horizontais de  $A - 1$  grafos básicos tipo  $L_2$ . Além disso, ela também pode ser obtida por soma conexa horizontal de  $d = |V^+ - V^-|$  grafos básicos  $L_2$  e  $k = \frac{A - d - 1}{2}$  grafos básicos  $L_3$ .

**Teorema 3.1.** Todo grafo  $\mathcal{G}$  pode ser obtido por somas conexas horizontais de grafos básicos  $L_2$  e  $L_3$  e cirurgias verticais.

Em consequência, todo grafo pode ser obtida por cirurgias horizontais e verticais de grafos básicos, como é exemplificado na Figura 2.

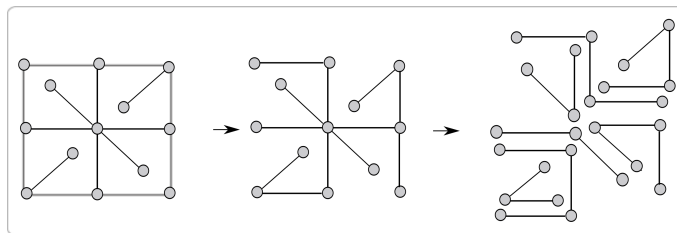


Figura 2: Decomposição de um grafo em  $d = 3$  grafos básicos  $L_2$  e  $k = 4$  grafos básicos  $L_3$ .

## 4 Grafos de superfícies fechadas com curvas

Seja  $M$  uma superfície fechada (sem bordo), orientada e seja  $\mathcal{C}$  um conjunto de curvas fechadas, simples e disjuntas  $\alpha_i, i = 1, \dots, A$ , sobre  $M$ . Este conjunto  $\mathcal{C}$  separa a superfície em regiões conexas  $M \setminus \mathcal{C}$ , então podemos associar um grafo  $\mathcal{G}$  com característica  $C(\mathcal{G}) = (V, A, W)$  ao par  $(M, \mathcal{C})$ , como podemos ver na Figura 3, da seguinte forma:

- a) cada região conexa  $U_i \subset M \setminus \mathcal{C}, i = 1, \dots, V$ , corresponde a um vértice  $v_i$  em  $\mathcal{G}$ , e cada curva  $\alpha_i, i = 1, \dots, A$ , de  $\mathcal{C}$  corresponde com uma aresta  $a_i$  em  $\mathcal{G}$
- b) uma aresta  $a_i$  incide no vértice  $v_i$  se, e somente se, a curva  $\alpha_i$  de  $\mathcal{C}$  associada à aresta  $a_i$  está no bordo da região  $U_i \subset M \setminus \mathcal{C}$  correspondente a  $v_i$
- c) um vértice  $v_i$  recebe o peso  $t_i$  se a região correspondente a  $v_i$  tem gênero  $t_i$ , então  $\sum_{i=1}^V t_i = W$

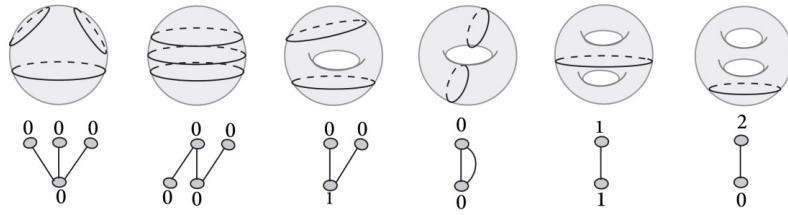


Figura 3: Exemplo de grafos associados a superfícies com curvas.

Os pares  $(M, \mathcal{C})$  e  $(M', \mathcal{C}')$  são ditos **equivalentes** quando existe um difeomorfismo de  $M$  em  $M'$  que leva  $\mathcal{C}$  em  $\mathcal{C}'$ . Então, pela definição de grafo associado, existe um isomorfismo entre seus respectivos grafos associados.

**Proposição 4.1.** [5] *Todo grafo  $\mathcal{G}$  com característica  $C(\mathcal{G}) = (V, A, W)$  está associado a um par  $(M, \mathcal{C})$ , onde  $M$  é uma superfície fechada e orientada e  $\mathcal{C}$  é um conjunto com  $A$  curvas fechadas, simples e disjuntas sobre  $M$ .*

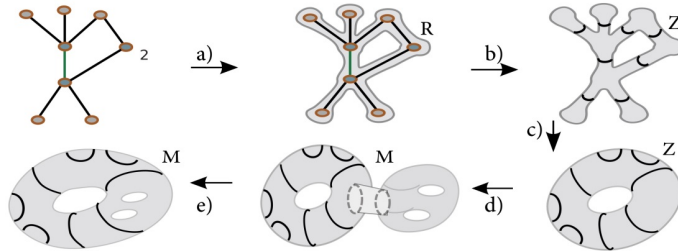


Figura 4: Superfície com curvas correspondentes à vizinhança tubular de um grafo com peso.

**Proposição 4.2.** [5] *Se  $\mathcal{G}$  é um grafo com característica  $C(\mathcal{G}) = (V, A, W)$ , associado ao par  $(M, \mathcal{C})$ , onde  $M$  é uma superfície fechada e orientada e  $\mathcal{C}$  é um conjunto com  $A$  curvas fechadas, simples e disjuntas sobre  $M$ , então a característica de Euler de  $M$  é dada por  $\chi(M) = 2(V - A - W)$  e o gênero é dado por  $g(M) = \beta_1(\mathcal{G}) + W$ .*

Os resultados anteriores provam que os grafos associados a pares  $(M, \mathcal{C})$  podem ser considerados como invariantes deles.

## 5 Aplicações estáveis

Sejam  $M$  e  $N$  duas superfícies e  $\mathcal{C}^\infty(M, N)$  o conjunto de todas as aplicações suaves entre  $M$  e  $N$  com a topologia  $\mathcal{C}^\infty$  de Whitney.

**Definição 5.1.** *Dois aplicações  $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$  são ditas  **$\mathcal{A}$ -equivalentes** quando existem difeomorfismos  $\phi : M \rightarrow M$  e  $\psi : N \rightarrow N$ , tais que  $h = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ . Uma aplicação  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$  é **estável** se existe uma vizinhança aberta  $W_f$  de  $f$ , tal que cada  $h$  em  $W_f$  é  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $f$ .*

O conjunto das aplicações estáveis de  $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ , denotado por  $\mathcal{E}(M, N)$ , é um conjunto aberto e denso em  $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ , [8].

### 5.1 Singularidades de aplicações estáveis

As aplicações entre superfícies podem ser vistas localmente como aplicações do plano no plano [8]. Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação estável e  $p = (x, y)$  um ponto de  $U$ , como podemos ver na Figura 5 :

- $p$  é ponto **regular** se  $(df)_p$  é isomorfismo. Nesse caso, localmente,  $f$  é da forma  $(x, y) \mapsto (x, y)$ .
- $p$  é ponto **singular** de  $f$ , então  $p$  e um ponto do tipo:
  - a) **Dobra**, se  $T_p\Sigma(f) \oplus Ker(df)_p = T_pU$ , onde  $\Sigma(f)$  é o conjunto de pontos singulares de  $f$ . Nesse caso, podemos escolher um sistema de coordenadas  $(x, y)$  tais que localmente  $f$  é  $(x, y) \mapsto (x, y^2)$ . A diferencial  $(df)_p$  leva o plano tangente  $T_pU$  na reta tangente à imagem do conjunto singular  $\Sigma(f)$ , chamado **contorno aparente** de  $f$ , em  $f(p)$ .
  - b) **Cúspide**, se  $T_p\Sigma(f) = Ker(df)_p$ , onde podemos encontrar coordenadas  $(x, y)$  tais que localmente  $f$  é da forma  $(x, y) \mapsto (x, y^3 + xy)$ . A diferencial  $(df)_p$  leva a reta tangente a  $\Sigma f$  em  $p$ , no ponto  $f(p)$ .

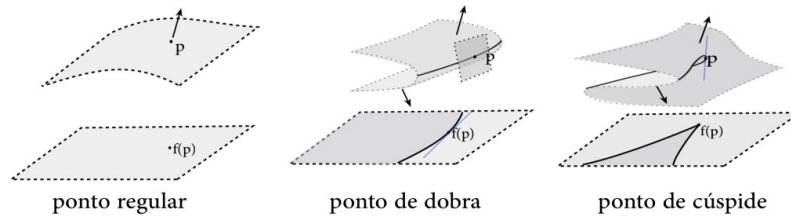


Figura 5: Singularidades estáveis do plano no plano.

Então, no caso particular de  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  ser aplicação estável:

1. O conjunto singular  $\Sigma f$  está formado por um **conjunto de curvas** simples e disjuntas no domínio de  $f$  com pontos de cúspide isolados, que separa o conjunto regular  $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma f$  em componentes conexas imersas sobre a imagem  $f(\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma f)$ .
2. O contorno aparente  $Bf = f(\Sigma f)$  é formado por **curvas suaves**, podendo ter **pontos duplos** (interseções transversas de imagens de duas curvas de dobras) e cúspides isoladas.

As aplicações  $\mathcal{A}$ -equivalentes tem conjuntos singulares e contornos aparentes  $\mathcal{A}$ -equivalentes.

O **grau local de  $f$  no ponto  $y$**  na sua imagem é a diferença entre o número de pontos onde a orientação é preservada e o número de pontos onde a orientação é invertida em  $f^{-1}(y)$ . O **grau** de uma aplicação  $f$  de classe  $C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  é o grau local em qualquer valor regular.

## 6 Grafo de aplicações estáveis entre superfícies

Sejam  $M$  e  $N$  duas superfícies fechadas e orientadas e  $f \in \mathcal{E}(M, N)$ . Já sabemos que o conjunto singular  $\Sigma f$  está formado por um conjunto de curvas fechadas, simples e disjuntas que separa as regiões regulares de  $M \setminus \Sigma f$  em componentes conexas. Podemos associar então ao par  $(M, \Sigma f)$  um grafo com pesos nos vértices, onde cada curva  $\alpha$  de  $\Sigma f$  corresponde a uma aresta  $a$ , cada região regular  $U \subset M \setminus \Sigma f$  corresponde a um vértice  $v$ , que recebe como peso  $t$  o gênero de  $U$ . Uma aresta  $a$  incide no vértice  $v$  se, e somente se, a curva singular correspondente a  $a$  está no bordo da região regular correspondente a  $v$ .

**Definition 6.1.** O grafo  $\mathcal{G}$  de característica  $C(\mathcal{G}) = (V, A, W)$  associado ao par  $(M, \Sigma f)$  é considerado o **grafo dual** de  $\Sigma f$  em  $M$  (ou grafo dual de  $f$ ). Diremos que a aplicação  $f$  **realiza**  $\mathcal{G}$ , sempre que o grafo  $\mathcal{G}$  pode ser associado ao par  $(M, \Sigma f)$ .

**Observação 6.1.** O grafo dual é um invariante de aplicações estáveis. De fato, no grafo está codificado as informações do conjunto regular de aplicações estáveis entre superfícies e consegue separar algumas aplicações com mesmo contorno aparente como ilustra a Figura 6.

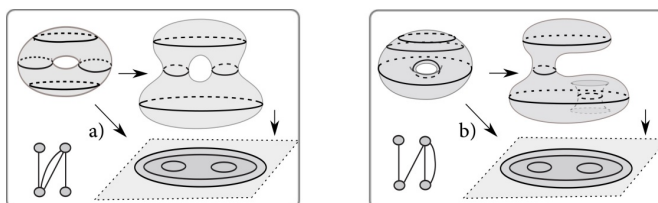


Figura 6: Aplicações do toro no plano com grafo de característica  $C(\mathcal{G}) = (4, 4, 0)$ .

Note que cada aplicação estável está associada a um grafo, porém cada grafo pode ser associada a uma classe de diferentes aplicações com pares  $(M, \Sigma f)$  equivalentes.

Uma pergunta natural é: “¿ Quais grafos com pesos inteiros positivos nos vértices estão associados às aplicações estáveis entre superfícies orientadas?”.

**Proposição 6.1.** [4] O grafo dual de qualquer aplicação estável entre duas superfícies fechadas e orientadas é bipartido.

Veremos agora condições necessárias e suficientes para que um grafo finito bipartido de característica  $C(\mathcal{G}) = (V, A, W)$  seja o grafo dual associado a alguma aplicação estável entre duas superfícies fechadas e orientadas.

### 6.1 Aplicações no plano

**Teorema 6.1.** [2] Todo grafo bipartido  $\mathcal{G}$  de característica  $C(\mathcal{G}) = (V, A, W)$  é o grafo dual de uma aplicação estável  $g : mT \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $mT$  é uma superfície de gênero  $m = \beta_1(\mathcal{G}) + W$ .

**Teorema 6.2.** [3] Um grafo bipartido  $\mathcal{G}$  de característica  $C(\mathcal{G}) = (V, A, W)$  é o grafo dual de uma aplicação estável sem cúspides (aplicação dobra) da esfera no plano se, e somente se, satisfaz  $V^+ - V^- = W^+ - W^-$ .

### 6.2 Aplicações na esfera

**Teorema 6.3.** [3] Todo grafo bipartido  $\mathcal{G}$  de característica  $C(\mathcal{G}) = (V, A, W)$  é o grafo dual de uma aplicação estável  $f : mT \rightarrow S^2$  com grau  $d$  arbitrário, onde  $mT$  é uma superfície de gênero  $m = \beta_1(\mathcal{G}) + W$ .

**Teorema 6.4.** [3] Um grafo bipartido  $\mathcal{G}$  de característica  $C(\mathcal{G}) = (V, A, W)$  é o grafo dual de uma aplicação dobra na esfera com grau  $d$  se, e somente se, satisfaz  $d = (V^+ - V^-) - (W^+ - W^-)$ .

### 6.3 Aplicações sobre o $n$ -toro

**Teorema 6.5.** [6] Todo grafo bipartido  $\mathcal{G}$  de característica  $C(\mathcal{G}) = (V, A, W)$  é o grafo dual de uma aplicação estável  $f : mT \rightarrow nT$  com grau  $|d| \leq (W-1)/(n-1)$  para  $n > 1$ , onde  $m = \beta_1(\mathcal{G}) + W$ . Para  $n=1$ , a aplicação estável tem grau  $d$  arbitrário.

### 6.4 Algoritmo de Realização

O Algoritmo para construir uma aplicação  $f$  com grau  $d$ , entre duas superfícies fechadas e orientadas que realiza um grafo bipartido  $G_W$  pode ser seguindo o esquema da Figura 7, construindo as aplicações que geram os grafos básicos, utilizando os resultados prévios e aplicando cirurgias horizontais e verticais entre eles que serão estendidas às aplicações que darão o resultado final.

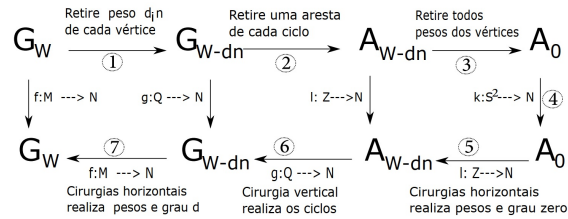


Figura 7: Esquema da realização de grafos bipartidos com pesos nos vértices.

## 7 Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos um estudo de como os grafos auxiliam na construção de aplicações estáveis entre duas superfícies fechadas e orientadas com conjunto singular pré-determinado. As descrições feitas são baseadas nos resultados de [2–6] e as provas formam baseadas em manipulação das cirurgias introduzidas em [4] e as transições de codimensão 1, dadas em [7].

### Agradecimentos

Projeto PID2021-124577NB-I00 financiado pelo MCIN/AEI/10.13039/501100011033 e "European Union NextGenerationEU/PRTR".

### Referências

- [1] S. Demoto. “Stable maps between 2-spheres with a connected fold curve”. Em: **Hiroshima Mathematical Journal** 35 (2005), pp. 93–113.
- [2] D. Hacon, C. Mendes de Jesus e M. C. Romero Fuster. “Fold maps from the sphere to the plane”. Em: **Experimental Mathematics** 15.4 (2006), pp. 491–497.
- [3] D. Hacon, C. Mendes de Jesus e M. C. Romero-Fuster. “Graphs of stable maps from closed orientable surfaces to the 2-sphere”. Em: **Journal of Singularities** 2 (2010), pp. 67–80.
- [4] D. Hacon, C. Mendes de Jesus e M. C. Romero-Fuster. “Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data”. Em: **Topology and Its Applications** 154 (2007), pp. 166–175. DOI: 10.1016/j.topol.2006.04.005.
- [5] D. Hacon, C. Mendes de Jesus e M. C. Romero-Fuster. “Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint”. Em: **Real and complex singularities**. CRC Press, 2003, pp. 227–235.
- [6] C. Mendes de Jesus. “Graphs of stable maps between closed orientable surfaces”. Em: **Comp. Appl. Math.** 2 (2017), pp. 1185–1194. DOI: 10.1007/s40314-016-0317-9.
- [7] T. Ohmoto e F. Aicardi. “First order local invariants of apparent contours”. Em: **Topology** 45.1 (2006), pp. 27–45. DOI: 10.1016/j.top.2005.04.005.
- [8] H. Whitney. “On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane”. Em: **Annals of Mathematics** (1955), pp. 374–410.