Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Decomposição de fluxos ao longo de folheações complementares: o caso linear

Paulo Ruffino[1]
UNICAMP, Campinas, SP

Resumo. Considere uma variedade diferenciável M que localmente possui duas folheações complementares $\mathcal{F}^1$ e $\mathcal{F}^2$. Um exemplo simples é um sistema de coordenadas local em uma variedade de dimensão 2. Se tivermos um fluxo (local) de difeomorfismos $(\varphi_t)_{t\in T}$ associado a uma equação diferencial, então existe localmente a seguinte decomposição geométrica $\varphi_t = \eta_t \circ \psi_t$ onde η_t e ψ_t são difeomorfismos tais que $\eta_t(F_1) \subset F_1$ para todas as folhas $F_1 \in \mathcal{F}^1$ e $\psi_t(F_2) \subset F_2$ para todas as folhas $F_2 \in \mathcal{F}^2$. Exploramos esse e outros fatos, sobretudo a decomposição no caso linear com as folheações canônicas geradas por translações afins de subspaços vetoriais do espaço euclidiano.

Palavras-chave. Fluxo de difeomorfismos, decomposição de fluxos, folheações complementares, sistemas lineares.

1 Introdução

Considere uma variedade diferenciável M que localmente possui duas folheações complementares $\mathcal{F}^1$ e $\mathcal{F}^2$. Exemplos simples e interessantes são encontrados quando consideramos sistemas de coordenadas local, ou superfícies de energia constante em sistemas hamiltonianos, dentre outros. Vamos considerar uma equação diferencial autônoma com um mínimo de regularidade tal que gere um fluxo local de difeomorfismos $(\varphi_t)_{t\in T}$. Em vários trabalhos anteriores mostramos que existe localmente a seguinte decomposição geométrica $\varphi_t = \eta_t \circ \psi_t$ onde η_t e ψ_t são difeomorfismos tais que $\eta_t(F_1) \subset F_1$ para todas as folhas $F_1 \in \mathcal{F}^1$ e $\psi_t(F_2) \subset F_2$ para todas as folhas $F_2 \in \mathcal{F}^2$. Mais precisamente, dados os subgrupos de difeomorfismos que fixam as folhas de $\mathcal{F}^1$ e $\mathcal{F}^2$ gerados pelos fluxos de campos de vetores tangentes a essas folhas, i.e.

$$\mathrm{Dif}(M, \mathcal{F}^1) = cl\{e^{t_1 X_1} \circ \dots e^{t_n X_n}, t_i \in \mathbb{R}, X_i \in TF^1, \text{ para todo } i = 1, \dots n, n \in \mathbb{N}\},$$

e

$$\mathrm{Dif}(\mathrm{M}, \mathcal{F}^2) = cl\{e^{t_1 X_1} \circ \dots e^{t_n X_n}, t_i \in \mathbb{R}, X_i \in TF^2, \text{ para todo } i = 1, \dots n, n \in \mathbb{N}\},$$

então $\varphi_t = \eta_t \circ \psi_t$ com $\eta_t \in \mathrm{Dif}(M, \mathcal{F}^1)$ e $\psi_t \in \mathrm{Dif}(M, \mathcal{F}^2)$. Várias versões desse resultado, em diferentes contextos de regularidade dos fluxos são demonstrados em [**1**], [**2**], inclusive uma versão onde temos pares complementares de distribuições não necessariamente integráveis, ver [**3**].

O que faremos aqui é mostrar como fica essa decomposição no caso de uma equação diferencial linear em $\mathbb{R}^n$. Essencialmente, vamos mostrar que se $n \geq 3$ sempre existe um par de folheações afins (i.e., as folhas são subspaços afins paralelos) tais que a decomposição existe globalmente (no

[1]ruffino@unicamp.br

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0038

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. v. 10, n. 1, 2023.

tempo e no espaço), onde as componentes da decomposição são lineares e dadas pelo produto de matrizes da seguinte forma:

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} [* \quad * \ldots * \quad *]_{k\times n} \\ \\ 0 \qquad\qquad I_{(n-k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k \qquad\qquad 0 \\ \\ [* \quad * \ldots * \quad *\,]_{(n-k)\times n} \end{pmatrix}$$

em relação a uma base apropriada.

Em particular, se considerarmos uma decomposição em cascata $\varphi_t = \eta_t^1 \circ \ldots \circ \eta_t^k$, i.e. k folheações complementares e k componentes da decomposição, com cada componente respeitando a folheação correspondente, temos que existem folheações afins complementares $\mathcal{F}^1, \ldots, \mathcal{F}^k$, onde cada $\mathcal{F}^i$ tem dimensão $d_i \in \{1,2\}$ para todo $1 \le i \le k$ e o fluxo linear é dado globalmente por:

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} [* \quad * \ldots * \quad * \quad *]_{d_1\times n} & & \\ & I_{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_{d_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{d_1} & & \\ [* \quad * \quad * \quad *]_{d_2\times n} & & \\ & \ddots & \\ & & I_{d_k} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} I_{d_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & I_{d_{k-1}} & \\ [* \quad * \ldots * \quad * \quad *]_{d_k\times n} & & & \end{pmatrix}.$$

A base de $\mathbb{R}^n$ aqui é a mesma dada pela forma de canônica de Jordan. A dimensão dos d_i's são um se o autovalor correspondente for real e são 2 caso contrário. Note que a dinâmica nos autoespaços generalizados não triviais da forma de Jordan, se existirem, ficam decompostas também.

2 Decomposição em cascata e o caso linear

No caso da variedade ter uma sequência de folheações complementares, decomposições mais finas podem ser obtidas refinando decomposições em relação a essas subfolheações. Para mais detalhes, ver por exemplo [**3**]. O problema de explosão de uma das componentes da decomposição pode ser solucionado no caso linear quando se faz escolhas adequadas de subspaços que geram as subfolheações.

No caso não linear, suponha que a variedade M tenha a seguinte estrutura: existe um par de *fibrados flag complementares* no seguinte sentido: existe uma sequência não trivial de distribuições complementares i.e. para cada $x \in M$ temos que $\Delta_1^1(x) \oplus \Delta_1^2(x) = \Delta_2^1 \oplus \Delta_2^2 = \ldots = \Delta_k^1 \oplus \Delta_k^2 = T_xM$, de tal maneira que a primeira componente forma uma sequência crescente de subspações tangentes $\Delta_1^1 \subset \Delta_2^1 \ldots \subset \Delta_k^1 \subset T_xM$ e a segunda componente forma uma sequência decrescente de subspações $T_xM \supset \Delta_1^2 \supset \Delta_2^2 \ldots \supset \Delta_k^2$.

Essa estrutura de subspaços, um contido dentro do outro $F^1 = (\Delta_1^1, \ldots, \Delta_k^1)$ e $F^2 = (\Delta_k^2, \ldots, \Delta_1^2)$ é chamada de *fibrado flag* sobre a variedade M. Cada fibra aqui é uma variedade flag (bandeira), ou em outras palavras: é um espaço homogêneo $Sl(n, \mathbf{R})/P$, onde P é um subgrupo parabólico, veja por exemplo o livro clássico [**4**] ou o texto mais recente com aplicações à dinâmica [**5**]. Se $\dim \Delta_i^1 - \dim \Delta_{i-1}^1 = 1$ para todo $i = 2, \ldots, k$ então cada fibra é chamada de *variedade flag maximal*, neste caso, $k = m - 1$, onde m é a dimensão de M.

Uma versão da proposição abaixo (corolário do teorema de existência da decomposição) aparece em [**3**] no contexto de dinâmica estocástica.

Proposição 2.1. *Dado um fibrado de variedades flag complementares $F^1 = (\Delta_1^1, \ldots, \Delta_k^1)$ e $F^2 = (\Delta_k^2, \ldots, \Delta_1^2)$, existe localmente uma decomposição do fluxo original até um tempo de explosão:*

$$\varphi_t = \eta_t^1 \circ \dots \eta_t^i \circ \eta_t^{i+1} \circ \dots \eta_t^k \circ \psi_t, \tag{1}$$

com a propriedade de que para todo $i = 1, \dots k$, temos que as primeiras i-componentes $(\eta_t^1 \circ \dots \eta_t^i)$ é solução de uma EDO no grupo de Lie $\mathrm{diff}(\Delta_i^1)$ e as últimas $(k-i+1)$ componentes $(\eta_t^{i+1} \circ \dots \eta_t^k \circ \psi_t)$ são a solução de uma EDO (não autônoma) no grupo de Lie $\mathrm{diff}(\Delta_i^2)$, com a convenção de que se $i = k$ então $\eta_t^{i+1} = Id$.

A decomposição é única se as distribuições das variedades flag forem involutivas.

Corolário 2.1. *Considere uma sequência de k distribuições complementares não-degeneradas em uma variedade M, i.e. $\Delta_1 \oplus \dots \Delta_k = T_x M$ para todo $x \in M$. Então o fluxo gerado por uma EDO pode ser decomposto, localmente, até um tempo de explosão como:*

$$\varphi_t = \xi_t^1 \circ \dots \xi_t^i \circ \xi_t^{i+1} \circ \dots \xi_t^k,$$

tal que para cada $i = 1, \dots k$ temos que as primeiras i-th componentes $(\xi_t^1 \circ \dots \xi_t^i)$ são soluções de uma EDO no grupo de Lie $\mathrm{diff}(\oplus_{j=1}^i \Delta_j)$ e as últimas $(k-i)$ componentes $(\xi_t^{i+1} \circ \dots \xi_t^k)$ são soluções de uma EDO não autônoma no grupo $\mathrm{diff}(\oplus_{j=i+1}^k \Delta_j)$.

Demonstração. Segue diretamente da Proposição 2.1: só precisa definir os flags F^1 e F^2 como:

$$\Delta_i^1 = \bigoplus_{j=1}^{i} \Delta_j$$

e

$$\Delta_i^2 = \bigoplus_{j=i+1}^{k} \Delta_j.$$

Observe que aqui, os flags F^1 e F^2 são determinados por $(k-1)$ subspaços não triviais.

$\square$

Em geral temos que os subgrupos de difeomorfismos $\mathrm{diff}(\Delta_i^1) \subseteq \mathrm{diff}(\Delta_{i+1}^1)$ e $\mathrm{diff}(\Delta_{i+1}^2) \supseteq \mathrm{diff}(\Delta_i^2)$ para todo $i = 1, \dots, (k-1)$. No caso de flags com distribuições involutivas, essas inclusões são estritas, o que permite avançar ainda mais no resultado:

Corolário 2.2. *Considere uma sequência de k distribuições complementares involutivas (folheações) em uma variedade diferenciável M, i.e. os espaços tangentes são escritos como $\Delta_1 \oplus \dots \Delta_k = T_x M$ para todo $x \in M$. Então um fluxo de difeomorfismos pode ser localmente decomposto, até um tempo de explosão como:*

$$\varphi_t = \xi_t^1 \circ \dots \xi_t^k, \tag{2}$$

tal que para cada $i = 1, \dots k$ temos $\xi_t^i \in \mathrm{diff}(\Delta_i)$. A decomposição é única.

3 Caso Linear

Considere uma equação diferencial linear autônoma em $\mathbf{R}^m$ (na verdade pode ser de várias naturezas: estocástica, rough path, com baixa regularidade, controladas por semimartingales com saltos, ver e.g. **[2]**):

$$d\,x(t) = A\,x(t)\; d\mathbf{X}_t, \tag{3}$$

onde A é uma matriz real $m \times m$. Seja φ_t o fluxo linear associado em $\mathbf{R}^m$. Como estrutura geométrica de folheações consideraremos $F_1 \oplus F_2 = \mathbf{R}^m$ dois subspaços vetoriais de $\mathbf{R}^m$. Por translação cada um deles gera a folheação correspondente:

$$\mathcal{F}_1 = \bigcup_{x \in \mathbf{R}^m} F_1 + x \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}_2 = \bigcup_{x \in \mathbf{R}^m} F_2 + x.$$

Exemplo: (Caso linear) O Corolário 2.2 garante que para sistemas lineares, até um tempo de explosão temos a seguinte decomposição da matriz fundamental (fluxo)

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} [* & *\ldots* & * & *]_{1\times n} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ [* & *\ldots* & * & *]_{1\times n} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ [* & *\ldots* & * & *]_{1\times n} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Um exemplo simples que mostra como esse tempo de explosão pode aparecer é a rotação em $\mathbf{R}^2$ com a folheação cartesiana: seja $\mathbf{X}$ uma função de controle (unidimensional) e tome o sistema linear:

$$dx_t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_t\, d\mathbf{X}_t.$$

O fluxo se decompõe como:

$$\begin{pmatrix} \cos X_t & -\sin X_t \\ \sin X_t & \cos X_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sec X_t & -\tan X_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin X_t & \cos X_t \end{pmatrix}. \tag{5}$$

A explosão dos coeficientes ocorrem se $X_t \in \{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\}$.

$\square$

Nossa última Proposição mostra que a explosão do exemplo anterior pode ser eliminada em espaços de autovetores generalizados relacionados com autovalores reais. Assim, em dimensão superior, sempre existe uma base de $\mathbf{R}^n$ com respeito a qual a decomposição sempre existirá, sem explosão em tempo finito.

Proposição 3.1. *Dada uma base de uma forma canônica de Jordan para a matriz de coeficiente da EDO (com 1s acima da diagonal), a seguinte decomposição em cascata do fluxo linear φ_t não tem explosão em tempo finito:*

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} [* & *\ldots* & * & *]_{d_1\times n} \\ & I_{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_{d_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{d_1} & & & \\ [* & * & * & *]_{d_2\times n} \\ & I_{d_3} & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_{d_k} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} I_{d_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & I_{d_{k-1}} & \\ [* & *\ldots* & * & *]_{d_k\times n} \end{pmatrix},$$

onde $d_i = 1$ se o autovalor correspondente for real e $d_i = 2$ caso contrário.

Os números positivos k acima contam o número de autovalores reais mais o número de pares de autovalores conjugados, incluindo a multiplicidade, tal que $\sum_{i=1}^{k} d_i = m$.

Demonstração. Usamos a seginte notação:

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} \Big(F_1(t)\Big)_{k\times k} & \Big(F_2(t)\Big)_{k\times \ell} \\ \\ \Big(F_3(t)\Big)_{\ell\times k} & \Big(F_4(t)\Big)_{\ell\times \ell} \end{pmatrix}.$$

$$\psi_t = \begin{pmatrix} \Big(Id\Big)_{k\times k} & \Big(0\Big)_{k\times \ell} \\ \\ \Big(F_3(t)\Big)_{\ell\times k} & \Big(F_4(t)\Big)_{\ell\times \ell} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

$$\eta_t = \begin{pmatrix} \Big(G_1(t)\Big)_{k\times k} & \Big(G_2(t)\Big)_{k\times \ell} \\ \\ \Big(0\Big)_{\ell\times k} & \Big(Id\Big)_{\ell\times \ell} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

E para a matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} \Big(A_1\Big)_{k\times k} & \Big(A_2\Big) \\ \Big(A_3\Big) & \Big(A_4\Big)_{\ell\times \ell} \end{pmatrix} \tag{8}$$

O cálculo da decomposiçao nos leva às seguintes equações:

$$\begin{aligned} dG_1(t) &= \big[A_1\ G_1(t) - G_2(t)\ A_3\ G_1(t)\big]\, dX_t, \\ dG_2(t) &= \big[A_1 G_2(t) + A_2 - G_2(t)\, A_4 - G_2(t)\, A_3\, G_2(t)\big]\, dX_t, \\ dF_3(t) &= \big[A_3\, G_1(t) + A_3\, G_2(t)\, F_3(t) + A_4 F_3(t)\big]\, dX_t, \\ dF_4(t) &= \big[A_3\, G_2(t)\, F_4(t) + A_4\, F_4(t)\big]\, dX_t. \end{aligned} \tag{9}$$

Para detalhes, veja o artigo [**2**]. Já sabemos que $F_3(t)$ and $F_4(t)$ não tem explosão. Assim, potenciais explosões podem ocorrer em $G_1(t)$ and $G_2(t)$. Além disso, explosões só podem ser causadas por termos de ordem maior que um, portanto assosiados à submatriz A_3. Portanto, nenhuma explosão aparece se $A_3 = 0$. No examplo de rotação acima, note que a explosão ocorre porque $A_3 = [1]$.

Uma forma canônica de Jordan nos dá exatamente $k-1$ decomposições distintas de $\mathbf{R}^m = \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^\ell$ com $s = d_1 + \ldots d_j$ e $\ell = d_{j+1} + \ldots d_k$ de tal forma que A_3 seja zero em relação à essa base. O Corolário 2.2 garante que existe a decomposição correspondente em k fatores e finalmente as equações (9) garantem que nenhum dos k fatores explodem em tempo finito.

□

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0038

4 Considerações Finais

A decomposição da Proposição 3.1 em termos de composição de funcionais lineares se aplica para qualquer matriz que seja exponencial de outra matriz real, i.e. que tenha logaritmo. Em outras palavras, a decomposição acima vale para todas as matrizes cujos autovalores reais negativos tem multiplicidade par. No caso complexo, o resultado vale com todos os d_i's iguais a um. Uma pesquisa futura relacionada com essa questão, dentre outras, é uma versão do teorema de Hartman-Grobman neste contexto: a dinâmica não-linear fica decomposta nas folhas correspondentes às imagens dos eixos pela conjugação.

Agradecimentos

Esse trabalho é parcialmente financiado pelo Projeto Temático FAPESP "Dinâmica Estocástica: aspectos analíicos, geoméricos e aplicações", Proc. nr. 2020/04426-6 e por CNPq 305212/2019-2.

Referências

[1] Melo, A.; Morgado, L; Ruffino, P. – Topology of foliations and decomposition of stochastic flows of diffeomorphisms. JDDE, v. 30, p. 39-54, 2018.

[2] Catuogno, P.; Lima, L. and Ruffino, P .– Geometric aspects of Young Integral: decomposition of flows. (arXiv:2204.03527, submitted), 2022.

[3] Catuogno, P.; da Silva, F. and Ruffino, P .– Decomposition of stochastic flows in manifolds with complementary distributions. *Stochastics and Dynamics*, v. 13, p. 1350009, 2013.

[4] Helgason, S. – *Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions.* Pure and Applied Mathematics, 113. Academic Press, 1984.

[5] San Martin, L. – *Flag type of semigroups: a survey.* Advances in Mathematics and Applications, 349–370, Springer, Cham, 2018.

DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0038