Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Álgebra Linear e Aplicações

Filipe Andre Cruz Adegas[1] Adriana Wagner[2]
UFMS, Aquidauana, MS

Nesse trabalho, tendo como base o conceito de sistemas lineares descreveremos uma aplicação em uma rede que é um conjunto de ramos através dos quais flui algum meio. Os resultados aqui apresentados fazem parte do estudo do Projeto de Iniciação Científica Voluntária- Álgebra Linear e Aplicações, tendo como base [1] e [2].

Definição 1. *Um* ***sistema de equações lineares*** *com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo*

$$(1)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{1}$$

com a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, números reais. Uma **solução** para (1) é uma n-upla de números $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ que satisfaz simultaneamente estas m equações. Dois sistemas de equações lineares são **equivalentes** se, e somente se, toda solução de qualquer um dos sistemas também é solução do outro. Podemos reescrever (1) numa forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B} \tag{2}$$

sendo A a **matriz dos coeficientes**, X a **matriz das incógnitas** e B a **matriz dos termos independentes**. Uma outra matriz que podemos associar a (1) é $[A\ B]$ chamada **matriz ampliada** do sistema.

Dada uma matriz A existem três operações elementares que podemos realizar com suas linhas: permuta das i-ésima e j-ésima linhas ($L_i \leftrightarrow L_j$); multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo k ($L_i \to kL_i$); substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais k vezes a j-ésima linha ($L_i \to L_i + kL_j$). Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que B é linha equivalente a A, se B for obtida de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A, neste caso denotamos por $A \sim B$. Dois sistemas lineares que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.

Definição 2. *Uma matriz $m \times n$ é* ***linha reduzida a forma escada*** *se: o primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1; cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero; toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nula. Dada uma matriz $A_{m\times n}$, seja $B_{m\times n}$ a matriz linha reduzida à forma escada linha equivalente a A. O* **posto** *de A, denotado por p, é o número de linhas não nulas de B. A* ***nulidade*** *de A é o número $n - p$.*

Teorema 1. (i) *Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes;* (ii) *Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p = n$, a solução é única;* (iii) *Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p < n$, podemos escolher $n - p$ incógnitas,e as outras p incógnitas serão dadas em função destas.*

[1]filipe.andre@ufms.br
[2]adriana.wagner@ufms.br

Definição 3. *Uma* ***rede*** *é um conjuntos e* ***ramos*** *através dos quais flui algum meio. Os ramos, por exemplo, podem ser fios elétricos através dos quais flui corrente elétrica, canos através dos quais flui água, ou ruas de cidades pelas quais fluem veículos. Os ramos das redes se encontram em pontos determinados* ***nós*** *ou* ***vértices*** *nos quais os fluxos se dividem. Como por exemplo, numa rede elétrica os nós ocorrem onde três ou mais fios se juntam.*

No estudo de redes existe alguma medida numérica da taxa segundo a qual o meio fui ao longo do ramo. Vamos restringir nosso estudo às redes em que existe conservação do fluxo em cada nó, ou seja, a taxa de fluxo para dentro de qualquer nó é igual à taxa de fluxo para fora desse nó.

Exemplo 1. *A Figura 1 mostra uma rede de quatro nós com indicação de algumas taxas de fluxo e sentido do fluxo ao longo de ramos. Encontre as taxas de fluxo e o sentido do fluxo nos demais ramos.*

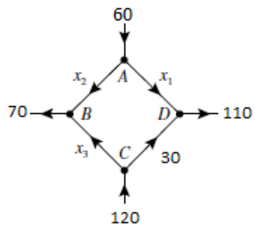

Figura 1: Rede

Associando sentidos arbitrários para as taxas de fluxos x_1, x_2 e x_3 sem nos preocuparmos com a veracidade desses sentidos, segue da conservação do fluxo nos nós A, B, C e D, respectivamente, que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 60 \\ x_2 + x_3 = 70 \\ x_3 + 30 = 120 \\ x_1 + 30 = 110 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 60 \\ x_2 + x_3 = 70 \\ x_3 = 90 \\ x_1 = 80 \end{cases} \tag{3}$$

Temos que a matriz ampliada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & 90 \\ 1 & 0 & 0 & 80 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 1 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 90 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Temos que o posto da matriz ampliada vale 3 e é igual da matriz dos coeficientes. Assim, voltando para o sistema linear obtemos que $x_1 = 80$, $x_2 = -20$ e $x_3 = 90$. Como x_2 é negativo, vemos que o sentido do fluxo naquele ramo está incorreto, pois o fluxo naquele ramo é para dentro do nó A.

Referências

[1] J. L. Boldrini, S. I. R. Costa, V. L. Figueiredo e H. G. Wetzler. **Álgebra Linear**. 3a. ed. São Paulo: Harbra, 1986. ISBN: 9788529402024.

[2] H. Anton e C. Rorres. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10a. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. ISBN: 9788540701700.

