Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Combinatória e Aplicações

Marcela Fabryellen Oliveira Santos[1] Adriana Wagner[2]
UFMS, Aquidauana, MS

Nesse trabalho, usando o conceito de funções geradoras e relações de recorrências apresentaremos alguns problemas de contagem e suas soluções. Os resultados aqui apresentados fazem parte do estudo do Projeto de Iniciação Científica Voluntária- Combinatória e Aplicações, tendo como base [1].

Consideremos o problema: encontrar o número de soluções inteiras da equação $x_1+x_2+x_3 = 15$, com $x_1 \in \{2,3,4\}$,$x_2 \in \{3,4,5\}$, $x_2 \in \{5,6,7\}$. Para isso, definimos um polinômio para cada variável x_1, x_2 e x_3, respectivamente:

$$p_1(x) = x^2 + x^3 + x^4, \quad p_2(x) = x^3 + x^4 + x^5 \text{ e } p_3(x) = x^5 + x^6 + x^7. \tag{1}$$

Os expoentes de x em p_i são os elementos do conjunto ao qual x_i pertence. Como estamos procurando números cuja soma seja 15, vamos considerar o produto $p(x)$ dos polinômios em (1),

$$\begin{aligned} p(x) &= p_1(x)p_2(x)p_3(x) = (x^2 + x^3 + x^4)(x^3 + x^4 + x^5)(x^5 + x^6 + x^7) \\ &= x^{10} + 3x^{11} + 6x^{12} + 7x^{13} + 5x^{14} + 3x^{15} + x^{16}, \end{aligned} \tag{2}$$

a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ tem 3 soluções inteiras com as restrições dadas. O polinômio (2) também fornece a resposta para outros problemas, como por exemplo, existem 7 soluções, com as restrições dadas para $x_1 + x_2 + x_3 = 13$. Assim, o polinômio dado em (2) gera o número de soluções para todas equações $x_1 + x_2 + x_3 = m$, para $m \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ com as restrições impostas para os x_i's.

Definição 1. *Uma **série de potências** é uma série infinita da forma* $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$, *com* a_i *números reais para* $i = 0, 1, 2, 3, \cdots$.

Definição 2. *Se* a_r, *para* $r = 0, 1, 2, \cdots$ *é o número de soluções de um problema de combinatória, a **função geradora ordinária** para esse problema é a série de potências*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots, \tag{3}$$

ou de maneira geral, dada a sequência (a_r), *a função geradora ordinária para esta sequência é definida como a série de potências* (3).

Problema 1. Encontre a função geradora para o número de maneiras de escolhermos r objetos de um conjunto de n objetos distintos com $r \leq n$.
Solução: Sabemos que o número de maneiras de retirarmos r objetos de um conjunto de n objetos distintos é C_n^r. Assim, a função geradora para este problema é

$$f(x) = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + C_n^rx^r + \cdots + C_n^nx^n = (1 + x)^n. \tag{4}$$

Problema 2. Encontrar a função geradora ordinária $f(x)$ na qual o coeficiente a_r de x^r é o número de soluções inteiras positivas de $x_1 + x_2 + x_3 = r$, com $r \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$, $2 \leq x_1 \leq 4$, $2 \leq x_2 \leq 4$ e $5 \leq x_3 \leq 7$.

[1] marcela$_f$@$ufms.br$
[2] adriana.wagner@ufms.br

Solução: A solução a_r para este problema é o coeficiente de x^r na expansão do produto

$$(x^2 + x^3 + x^4)(x^2 + x^3 + x^4)(x^5 + x^6 + x^7) = x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 7x^{12} + 6x^{13} + 3x^{14} + x^{15} \quad (5)$$

sendo, assim, está série de potências, é a função geradora procurada.

A formulação de relações de recorrências é uma ferramenta importante e multifuncional na resolução de problemas combinatórios. Muitos problemas considerados difíceis são facilmente resolvidos por essa técnica. Para isso, partimos do problema particular para o problema genérico, ou seja, obtemos a solução do problema genérico a partir da solução de exemplares menores do problema.

Problema 3. A Torre de Hanói, inventado por Edoward Lucas, tem como objetivo passar os oito discos colocando em ordem crescente de tamanho (de cima para baixo) no eixo à esquerda para o eixo à direita, na mesma ordem, e efetuando o menor número de movimentos. Somente um disco pode ser mudado de eixo a cada movimento, e ele não pode ser colocado em cima de um disco menor. Encontre uma expressão para o número mínimo de movimentos do jogo.

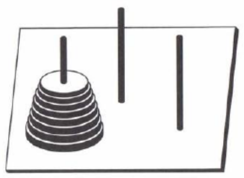

Figura 1: Torre de Hanói

Solução: A tática consiste em considerar o problema para uma torre com n discos. Seja T_n o menor número de movimentos para mudar uma torre de n discos do eixo à esquerda para o eixo à direita. Da regra do jogo, para que o maior disco possa ser colocado no eixo à direita, é exigido que a configuração de discos que procede este movimento seja a que tem todos os discos, com exceção do maior, empilhados no eixo intermediário e o maior disco sozinho no eixo à esquerda.

A tarefa de passar os $n - 1$ discos menores do eixo à esquerda para o eixo intermediário é equivalente à de passar $n - 1$ discos do eixo intermediário para o eixo à direita. Assim, T_{n-1} é o menor número de movimentos para isso. Uma vez que o disco maior seja colocado no eixo à direita, resta ainda passar para este último todos os $n - 1$ discos que estão no eixo intermediário, novamente temos T_{n-1} movimentos mínimos para isso. Temos então um total de no mínimo $2T_{n-1} + 1$ movimentos. Notemos que se tivéssemos apenas um disco, precisaríamos apenas de um movimento para realizar o jogo. Assim, a relação de recorrência para o jogo é

$$\begin{cases} T_1 = 1 \\ T_n = 2T_{n-1} + 1 \quad n \geq 2 \end{cases} \quad (6)$$

Uma solução para a relação é

$$T_n + 1 = 2T_{n-1} + 1 + 1 = 2(T_{n-1} + 1). \quad (7)$$

Considerando $\tau_n = T_n + 1$, de (7) temos $\tau_n = 2\tau_{n-1}$, resultando numa progressão geométrica de razão 2 e termo inicial $\tau_1 = 2$. Portanto, $\tau_n = 2^n$, e assim,

$$T_n = 2^n - 1, \quad n \geq 1. \quad (8)$$

Referências

[1] J. P. O. Santos, M. P. Mello e I. T. C. Murari. **Introdução à Análise Combinatória**. 4a. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007. ISBN: 9788573936346.

