

Uma comparação entre as ondas estacionárias para as equações forçada de Korteweg-De Vries e Whitham

Luiz G. Martins ¹; Marcel T. A. Souza²

UFPR, Curitiba, PR

Marcelo V. Flamarion³

UACSA/UFRPE, Cabo de Santo Agostinho, PE

Roberto Ribeiro-JR⁴

DMAT/UFPR, Curitiba, PR

Este trabalho discorre sobre o estudo de ondas aquáticas geradas pela interação correnteza-topografia. O presente estudo é feito no contexto dos modelos reduzidos de Whitham e da equação forçada de Korteweg-De Vries (fKdV). Estes modelos são utilizados como uma aproximação das equações governantes das ondas aquáticas em situações em que a intensidade da correnteza é próxima da velocidade de propagação das ondas no regime de águas rasas [1].

Consideramos um sistema de coordenadas adimensional no qual a velocidade da onda de superfície no regime de águas rasas é 1. Supomos que a topografia do fundo do canal ($h(x)$) interage com uma correnteza constante $F = 1 + \varepsilon f$, onde $\varepsilon > 0$ e $f \in \mathbb{R}$. O objetivo principal do nosso estudo é investigar em detalhes o perfil das ondas geradas pela interação correnteza-topografia.

A dinâmica das ondas geradas através dessa interação pode ser descrita através da equação de Whitham [2]

$$\eta_t + f\eta_x - \frac{3}{2}\eta\eta_x - K * \eta_x = \frac{1}{2}h_x(x), \text{ onde } \hat{K}(k) = -1 + \sqrt{\frac{\tanh k}{k}}. \quad (1)$$

Aqui, $\eta(x, t)$ denota o deslocamento da superfície livre, $*$ denota o operador convolução, K denota o núcleo de convolução e $\hat{\cdot}$ denota a transformada de Fourier periódica.

No regime de ondas longas ($k \approx 0$), obtemos via série de Taylor que o operador \hat{K} pode ser aproximado por $-k^2/6$. Neste caso, a equação (1) transforma-se na fKdV

$$\eta_t + f\eta_x - \frac{3}{2}\eta\eta_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx} = \frac{1}{2}h_x(x). \quad (2)$$

As equações (1) e (2) são resolvidas numericamente, considerando $f = 0,5$ e a topografia

$$h(x) = \varepsilon \operatorname{sech}^2(\sigma_h x), \quad (3)$$

onde ε é a amplitude e σ_h é um parâmetro que controla o comprimento efetivo da topografia. Buscando por soluções estacionárias, faz-se $\eta_t = 0, \forall t > 0$. As equações (1) e (2) são discretizadas em uma malha uniforme $x_j = -N/2 + j\Delta x, \Delta x > 0, j = 0, 1, \dots, N-1$. Denotando por $\eta_j = \eta(x_j)$,

¹luiz.martins1@ufpr.br

²marcel.abreu@ufpr.br

³marcelo.flamarion@ufrpe.br

⁴robertoribeiro@ufpr.br

segue que

$$f\eta_{x,j} - \frac{3}{2}\eta_j\eta_{x,j} - K * \eta_{x,j} = \frac{1}{2}h_x(x_j), \tag{4}$$

$$f\eta_{x,j} - \frac{3}{2}\eta_j\eta_{x,j} - \frac{1}{6}\eta_{xx,j} = \frac{1}{2}h_x(x_j). \tag{5}$$

As equações (4) e (5) correspondem a dois sistemas de equações diferenciais de N equações e N incógnitas. Os sistemas são resolvidos utilizando-se o método de Newton, onde as derivadas em x são calculadas espectralmente por meio da transformada rápida de Fourier [3].

A topografia (3) gera ondas de superfície cujo formato corresponde a uma onda solitária localizada sobre a topografia. Com o propósito de compreender como o perfil destas ondas solitárias se comporta quando se varia a amplitude ε da topografia (3), fixamos $\sigma_h = 0,7$. A amplitude (A) do perfil de onda gerado é obtida através da diferença entre os valores máximo e mínimo de η . Conforme mostrado na Figura 1, quanto maior a amplitude (ε) da topografia, maior será a amplitude da onda de superfície para ambas as equações de Whitham e fKdV. Também é possível observar que a amplitude da onda de superfície da equação de Whitham supera a de fKdV.

Ao aumentar o valor do parâmetro σ_h da topografia (3), as amplitudes das ondas estacionárias diminuem em ambos modelos. A Figura 2 mostra essa relação, onde é possível observar que a amplitude da onda gerada pela equação de fKdV diminui mais rapidamente que a da gerada pela equação de Whitham.

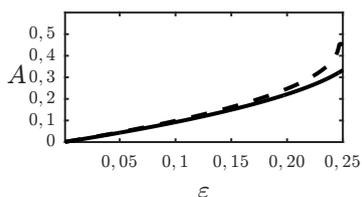


Figura 1: Comparação entre a amplitude da topografia e da onda de superfície para a equação de fKdV (linha sólida) e para a equação de Whitham (linha tracejada).

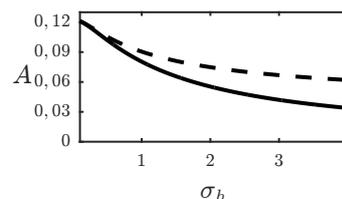


Figura 2: Relação entre o comprimento efetivo da topografia e a amplitude da onda de superfície da equação de fKdV (linha sólida) e da equação de Whitham (linha tracejada).

Os experimentos numéricos realizados em nosso estudo possibilitam avaliar o grau de proximidade entre os modelos de Whitham e fKdV. A continuidade natural deste estudo consiste em comparar as ondas de superfície geradas pelos referidos modelos com as equações governantes completas. Por fim, os autores Martins e Souza agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) pelo financiamento deste estudo.

Referências

- [1] P. A. Milewski. “The forced Korteweg-De Vries equation as a model for waves generated by topography”. Em: **CUBO** 4 (2004), pp. 33–51.
- [2] M. V. Flamarion. “Trapped waves generated by an accelerated moving disturbance for the Whitham equation”. Em: **Partial Differential Equations in Applied Mathematics** 5 (2022), pp. 1–5. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.padiff.2022.100356>.
- [3] L. N. Trefethen. **Spectral Methods in Matlab**. Philadelphia: Society for Industrial e Applied Mathematics, 2000. ISBN: 978-0-89871-465-4.