Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Programação Geométrica na Gestão de Qualidade da Água

Pedro H. A. Alves[1]
Matemática Bacharelado - UFMS
Rúbia M. O. Santos[2]
INMA/UFMS, Campo Grande, MS

A Programação Geométrica é uma técnica usada para resolver problemas algébricos de programação não-linear que se apresentam da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{s.a} & g_i(x) \leq 1, i = 1, 2, ..., p, \\ & x_j > 0, j = 1, 2, ..., n. \end{array}$$

onde as funções $f(x)$ e $g_i(x)$ são

$$f(x) = \sum_{k \in J_0} T_k = \sum_{k \in J_0} \alpha_k \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{kj}}$$

$$g_i(x) = \sum_{k \in J_i} T_k = \sum_{k \in J_i} \alpha_k \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{kj}}$$

sendo α_k, a_{kj}, $(j = 1, 2, ..., n)$, números reais e α_k é o coeficiente do monômio T_k. J_0 é o conjunto de índices dos monômios da função objetivo e J_i descreve os termos de cada restrição. Estes conjuntos são mutuamente disjuntos e $J_0 \cup J_1 \cup \cdots \cup J_p \coloneqq \{1, 2, ..., P\}$ em que P é o número total de termos. Se os coeficientes de todos os termos forem positivos, o problema é chamado de Problema Geométrico Posinomial; se houver ao menos um termo negativo, é chamado de Problema Geométrico Signomial [1]. As variáveis que compõem o problema constituem a n-upla de números reais $x = (x_1, ..., x_n)$.

Problemas de Programação Geométrica não são convexos em sua forma padrão, mas admitem uma reformulação convexa equivalente a partir da mudança de variáveis $y_j = ln(x_j)$ e da transformação das funções envolvidas. A solução global pode ser encontrada resolvendo o dual associado, o qual exibe uma estrutura mais simples [1]. O objetivo deste trabalho consiste em estudar e resolver o problema gestão da qualidade da água proposto em [2], que permite avaliar a contribuição de técnicas de redução da poluição.

Neste modelo, um rio é dividido em n partes e m processos de tratamento podem ser usados. Foram consideradas as variáveis x_{ij}, que representam a fração de carga de resíduo restante do processo de tratamento j no local i após o término do processo. A variável z indica em quantas vezes deve ser aumentado o fluxo do rio de modo a minimizar a função objetivo. Os custos dos processos de tratamento e da regulação de água, respectivamente, são da forma $C_{ij} = c_{ij} x_{ij}^{b_{ij}}$ e $C_r = c_r z^{b_r}$, em que $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m$. $c_{ij}, c_r, b_r > 0$ e $b_{ij} < 0$ são constantes conhecidas. Considerando um rio dividido em duas partes $(n = 2)$, nas quais é feito o tratamento primário da água, deseja-se avaliar o uso também do tratamento secundário, assim $m = 2$. A tabela 1 apresenta as relações de custo em cada parte do sistema e a situação é ilustrada na figura 1.

[1]amorim.alves@ufms.br
[2]rubia.oliveira@ufms.br

 © 2023 SBMAC

Tabela 1: Custos anuais totais (em milhares de dólares).

Local	Custo tratamento primário	Custo tratamento secundário
1	$200x_{11}^{-0,36}$	$270x_{12}^{-0,21}$
2	$180x_{21}^{-0,32}$	$215x_{22}^{-0,19}$

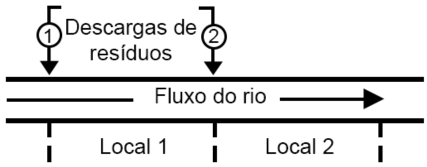

Figura 1: Ilustração do problema

A função objetivo (1) foi obtida pela soma dos custos apresentados na tabela 1 com o custo da regulação de fluxo, que é de $30z^{2,2}$. Sendo D_i o deficit de oxigênio em cada local, e $\bar{D}_i$ o deficit máximo permitido, espera-se que $D_i \leq \bar{D}_i$. Ao definir $\bar{D}_i = 2{,}5$mg/l nos dois locais, é possível obter as restrições (2) e (3). Supondo que o processo de tratamento primário ($j = 1$) consegue remover cerca de 40% dos resíduos, sobrando 60%, obtêm-se (4) e (5). Assim, o Problema Geométrico Posinomial obtido é

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimizar} & C = 30z^{2,2} + 200x_{11}^{-0,36} + 270x_{12}^{-0,21} + 180x_{21}^{-0,32} + 215x_{22}^{-0,19} & (1)\\
\text{s.a} & 13{,}47x_{11}x_{12}z^{-1} \leq 1, & (2)\\
 & 10{,}1x_{11}x_{12}z^{-1} + 6{,}26x_{21}x_{22}z^{-1} \leq 1, & (3)\\
 & 0{,}6x_{11}^{-1} \leq 1 & (4)\\
 & 0{,}6x_{21}^{-1} \leq 1 & (5)
\end{array}
$$

Problemas de Programação Geométrica podem ser resolvidos eficientemente a partir de algoritmos baseados no Método dos Pontos Interiores [3]. Usando um algoritmo implementado na linguagem Fortran, foram encontradas as soluções ótimas do problema supracitado: $z = 1{,}441$, $x_{11} = 0{,}6086$, $x_{12} = 0{,}1369$, $x_{21} = 0{,}8188$, $x_{22} = 0{,}1171$ e o custo anual do sistema é 1.231.227 dólares. Posteriormente, a técnica será aplicada aos problemas clássicos da literatura [3, 4].

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq e ao INCTMat pelo incentivo e apoio financeiro, por fim, à UFMS pela oportunidade de trilhar o caminho da pesquisa científica.

Referências

[1] R. M. Oliveira. "Algoritmos de Busca Global para Problemas de Otimização Geométricos e Multiplicativos". Tese de doutorado. UNICAMP, 2005.

[2] John R. McNamara. "An optimization model for regional water quality management". Em: **Water Resources Research** 2 (1976), pp. 125–134.

[3] Stephen Boyd et al. "A tutorial on geometric programming". Em: **Optimization and Engineering** 8 (2007), pp. 67–127.

[4] Ron S. Dembo. "A set of Geometric Programming Test Problems and Their Solutions". Em: **Mathematical Programming** 10 (1974), pp. 192–213.

 © 2023 SBMAC