Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo da implementação de Redes Neurais Informadas pela Física (PINN) para obtenção de soluções de equações diferenciais ordinárias

Julia Bueno Condal[1], Ramon de Attayde Barros de Souza[2]
UERJ-ZO, Rio de Janeiro, RJ

Dentro do estudo de redes neurais, aplicadas em equações diferenciais, a PINN (Rede Neural Informada pela Física) [1] caracteriza-se por conter em sua rotina computacional, a informação da lei física, i.e., a equação diferencial inerente ao problema estudado.

Considerando uma rede neural contruída, a equação diferencial é incluída diretamente na função de perda da rede, formando a rede PINN.

O algoritmo geral de uma rede neural [2], a cada iteração, considerando uma entrada x, n neurônios na camada hidden e uma saída $\hat{x}$, pode ser descrito por:

$$\hat{x} = \sigma(\sum_{i=1}^{n} w_i x + b) \tag{1}$$

onde $\hat{x}$ representa a saída da rede, w_i o peso relativo ao neurônio i, b é chamado de viés (bias) e σ é uma aplicação, denominada função de ativação.

Na hipótese de equação diferencial ordinária [3] de 1ª ordem, podemos representar pela equação (2), conforme segue-se:

$$\frac{dx}{dt} - f(t,x) = F(x', x, t) = 0 \tag{2}$$

onde $x(t)$ e t variável independente.

As funções de perda, utilizadas nas redes neurais PINN, são descritas pelas equações (3), (4) e (5):

$$Loss_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{x} - x)^2 \tag{3}$$

$$Loss_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(F(\hat{x}', \hat{x}, t)^2 \tag{4}$$

$$Loss_{total} = Loss_1 + Loss_2 \tag{5}$$

sendo x representando valor de entrada, $\hat{x}$ valor de saída, n a quantidade de iterações e $Loss_i$ representando a medida da perda, i.e., o erro de aproximação.

Este estudo objetiva avaliar a implementação de Redes Neurais Informadas pela Física (PINN), em equações diferenciais ordinárias [4], em busca de soluções tão próximas quanto possíveis das soluções analíticas.

[1]juliabcondal@gmail.com
[2]ramon.souza@uerj.br

Para tal, serão comparadas os resultados obtidos por redes tradicionais, i.e., sem o conhecimento da equação diferencial, e por redes PINN.

Todas as rotinas computacionais, correspondentes às redes neurais, serão implementadas em linguagem Python [5].

A redes neurais serão treinadas, buscando a quantidade ideal de camadas de neurônios (hidden), bem como uma melhor taxa de aprendizagem.

Será considerado o erro médio quadrático, como critério de otimização, sendo este realizado pela minimização da função de perda da rede.

Considerando o escopo das redes neurais supervisionadas, a convergência será realizada, a partir do conhecimento da solução analítica.

Os resultados serão representados por gráficos comparativos, contendo a solução analítica e a solução obtida pela rede neural.

Referências

[1] M. F. Raissi, P. Perdikaris e G.E Karmiadakis. "Physics-informed neural networks: a deep framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations". Em: **Journal of Computational Physics** (2019). DOI: `https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045`.

[2] C. F. Higham. "Deep Learnig: An introduction for applied mathematicans". Em: **SIAM** (2019). DOI: `10.1137/18M1165748`.

[3] J. Sotomayor. **Equações diferenciais ordinárias**. São Paulo: USP, 2011.

[4] J. Chakraverty e S. Mall. **Artificial neural networks for engineers and scientists. Solving Ordinary Differential Equations**. CRC Press, 2017.

[5] J. V. Guttag. **Introduction to computation and programming using Python**. Spring, 2013.