Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Avaliação das soluções obtidas por redes neurais e pelos métodos de Euler (explícito e implícito), em equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem

Maria Eduarda A.M.Fontes[1], Ramon de Attayde B.Souza[2]
UERJ-ZO, Rio de Janeiro, RJ

Considerando uma função $x(t)$ e sua respectiva taxa de variação representada por $f(t,x)$, as equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem [1] podem ser descritas pela equação 1:

$$x' = f(t,x) \tag{1}$$

Relevando às dificuldades existentes, na busca por soluções analíticas, métodos numéricos e computacionais são com frequência estudados, com intuito de obter tais soluções.

Uma rede neural [2] consiste de um modelo computacional, constituído por pontos denominados neurônios, distribuídos em três blocos: camada de entrada (in), camadas escondidas (hidden) e camada de saída (out).

As camadas são relacionadas através de operações matemáticas relativamente simples, juntamente com uma aplicação σ, denominada função de ativação.

Após construção da arquitetura da rede neural, os dados de entrada percorrem n vezes a rede, objetivando atingir um erro mínimo de aproximação. Esse processo chama-se treinamento da rede e, ocorre sempre buscando encontrar os melhores parâmetros inerentes à rede, tais como: taxa de aprendizagem (learning rate), erro médio quadrático, quantidade de camadas escondidas, quantidade de neurônios e quantidade de iterações.

Dessa forma, considerando uma rede neural constituída por uma entrada x, k neurônios na camada hidden e uma saída $\hat{x}$, para cada iteração, o seguinte algoritmo pode ser generalizado:

$$\hat{x} = \sigma(\sum_{i=1}^{k} w_i x + b) \tag{2}$$

onde $\hat{x}$ representa o resultado da rede, w_i o peso relativo ao neurônio i e b é chamado de viés (biase).

Com relação aos métodos numéricos de Euler [3], em seus formatos explícito (3) e implícito (4), estes são obtidos a partir da série de Taylor [4] e seus respectivos algoritmos são descritos abaixo:

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i) \tag{3}$$

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_{i+1}, x_{i+1}) \tag{4}$$

com $i = 1, ..., n$, h sendo a partição relativa à discretização do domínio e $t_{i+1} = t_i + h$.

[1] mariaeduardaarmond@yahoo.com.br
[2] ramon.souza@uerj.br

Este estudo tem como objetivo, analisar no problema de Cauchy [1] ,descrito em (5) e (6), a convergência de soluções, obtidas por redes neurais [5] e via métodos numéricos de Euler (implícito e explícito).

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{5}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{6}$$

sendo $x(t)$, t a variável independente e condição inicial (6).

As redes neurais serão construídas, considerando a variação de camadas de neurônios (hidden), a taxa de aprendizagem (learning rate) e, por fim, o treinamento utilizando o erro médio quadrático, como critério de otimização.

As rotinas computacionais relativas aos métodos numéricos de Euler (explícito e implícito) e das redes neurais, serão implementadas em linguagem Python [6].

A convergência, relativa aos métodos numéricos, será analisada a partir do conhecimento da solução analítica.

Analogamente, o mesmo ocorrerá para as redes neurais, sendo este caracterizado por aprendizagem supervisionada.

Os resultados serão apresentados por meio de gráficos, contemplando as soluções obtidas por Euler explícito, Euler implícito e por redes neurais.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Referências

[1] J. Sotomayor. **Equações diferenciais ordinárias**. São Paulo: USP, 2011.

[2] C. F. Higham. “Deep Learnig: An introduction for applied mathematicans”. Em: **SIAM** (2019). DOI: 10.1137/18M1165748.

[3] J. C. Butcher. **Numerical methods for ordinary differential equations**. Wiley, 2008. ISBN: 9780470723357.

[4] E. L. Lima. **Curso de Análise**. IMPA, 1992.

[5] J. Chakraverty e S. Mall. **Artificial neural networks for engineers and scientists. Solving Ordinary Differential Equations**. CRC Press, 2017.

[6] J. V. Guttag. **Introduction to computation and programming using Python**. Spring, 2013.