Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Esponja numérica para as equações de Boussinesq com topografia variável no espaço e no tempo

Luiz G. Martins[1]
UFPR, Curitiba, PR
Marcelo V. Flamarion[2]
UACSA/UFRPE, Cabo de Santo Agostinho, PE
Roberto Ribeiro-Jr[3]
DMAT/UFPR, Curitiba, PR

As equações que governam a dinâmica das ondas aquáticas são representadas pelas equações de Euler, as quais correspondem a um sistema de equações diferenciais parciais não lineares de fronteira livre e móvel [1]. A solução analítica ou numérica dessas equações é altamente complexa e requer técnicas avançadas que podem ser de difícil compreensão para não especialistas. Uma abordagem moderna e elegante no estudo dessas equações é a utilização de modelos reduzidos. Esses modelos são versões simplificadas das equações de Euler que apresentam menos parâmetros. Nas áreas de equações diferenciais parciais, a obtenção desses modelos é realizada por meio da técnica conhecida como análise assintótica. Através dessa ferramenta, é possível reduzir o número de incógnitas envolvidas nas equações ou simplificar as não linearidades presentes, de forma a manter o máximo possível de informações do modelo original.

Com respeito ao estudo das ondas aquáticas, um dos modelos assintóticos mais conhecidos é o modelo de Boussinesq. Este modelo fornece uma boa aproximação para a dinâmica da onda de superfície quando esta é longa quando comparada à profundidade do oceano. O objetivo principal deste trabalho é investigar, de forma numérica, as ondas geradas pela interação correnteza-topografia, bem como a geração de ondas através de deslocamentos da topografia submarina por meio do modelo Boussinesq.

Para tal fim, apresentamos uma formulação das equações de Boussinesq que incorpora uma esponja artificial na fronteira do domínio. Do ponto de vista físico, a esponja pode ser vista como um termo de amortecimento que absorve ondas de pequena amplitude que são refletidas ou transmitidas. Adicionalmente, realizamos ensaios numéricos para validar a formulação proposta e avaliar em quais circunstâncias a utilização desta esponja é vantajosa.

Denotando por $\eta(x,t)$ a superfície livre da água, $h(x,t)$ a topografia no fundo do canal, $u(x,t)$ a média vertical da velocidade horizontal e sob a hipótese de que há uma pressão variável $P(x,t)$ na superfície livre da água, Chen [2] derivou as equações de Boussinesq. Estas equações são usadas para descrever a propagação de ondas de superfície em águas rasas e podem ser expressas da seguinte forma

$$\begin{cases} \eta_t + ((1+\alpha h+\alpha\eta)u)_x = -h_t, \\ u_t + \eta_x + \alpha u u_x - \dfrac{\beta}{3}u_{xxt} = \dfrac{\beta}{2}h_{xtt} - \alpha P_x, \end{cases} \tag{1}$$

onde α é o parâmetro de não-linearidade, o qual controla a não linearidade da EDP (1), e β o

[1] luiz.martins1@ufpr.br
[2] marcelo.flamarion@ufrpe.br
[3] robertoribeiro@ufpr.br

parâmetro de dispersão, que regula o regime de profundidade, a saber, águas rasas para $0 < \beta \ll 1$ ou águas profundas $\beta \gg 1$.

A inserção de uma esponja artificial é uma técnica amplamente empregada no estudo de ondas. Por exemplo, Grimshaw e Maleewong [3] utilizaram esta metodologia no contexto da equação forçada de Korteweg-De Vries, permitindo a realização de experimentos numéricos por longos períodos de tempo com um menor custo computacional.

Neste estudo propomos a seguinte versão das equações de Boussinesq

$$\begin{cases} \eta_t + ((1 - \alpha h + \alpha\eta)u)_x - 2s(x)\eta = h_t, \\ u_t + \eta_x + \alpha u u_x - \dfrac{\beta}{3} u_{xxt} - G = -\dfrac{\beta}{2} h_{xxt} - \alpha P_x, \end{cases} \tag{2}$$

onde

$$G(x,t) = \int s^2(x)\eta(x,t)\, dx \text{ e } s(x) = \frac{A}{2}(\tanh(x+B) - \tanh(x-B)) - A, \; A, B > 0.$$

Aqui, a integração em $G(x)$ é entendida como uma antiderivada e $s(x)$ corresponde a uma esponja que absorve ondas refletidas ou transmitidas quando estas passam pelos pontos $x = B$ ou $x = -B$. O parâmetro A controla o quão rápido ou lento a absorção ocorre, enquanto B controla a região em que a esponja não tem efeito.

A metodologia numérica utilizada no cálculo da solução dos sistemas (1) e (2) é uma adaptação do esquema pseudospectral proposto por [4] no estudo da equação de Korteweg-De Vries. Nesse esquema, as derivadas em relação a x são calculadas de forma espectral por meio da transformada rápida de Fourier, e a integração no tempo é feita pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Neste estudo, realizamos a validação numérica das equações de Boussinesq com esponja. Para isso, comparamos a solução desse sistema com o sistema de Boussinesq padrão proposto por Chen [2] em três casos distintos: (i) propagação de ondas solitárias em um canal com profundidade e pressão nulas; (ii) geração de ondas decorrentes da interação entre a correnteza e a topografia em um canal com uma única elevação submarina; (iii) no estudo de ondas presas. A validação numérica destes casos permite avaliar a eficácia da técnica de esponja artificial no modelo de Boussinesq.

Os resultados obtidos neste estudo são relevantes para a compreensão do processo de formação de ondas aquáticas. Por meio dessa pesquisa, é possível gerar conhecimento científico que permita uma melhor compreensão do ambiente marinho, contribuindo para a promoção da segurança das comunidades costeiras. Dessa forma, o estudo das ondas e sua interação com a topografia submarina pode fornecer informações cruciais para o desenvolvimento de medidas preventivas e mitigadoras de riscos, tornando o oceano um lugar mais seguro para a sociedade. Por fim, o autor Martins agradece à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) pelo financiamento deste estudo.

Referências

[1] G. B. Whitham. **Linear and Nonlinear waves**. New York: John Wiley & Sons, 1999. ISBN: 9780471359425.

[2] M. Chen. "Equations for bi-directional waves over an uneven bottom". Em: **Mathematics and Computers in Simulation** (2003). DOI: 10.1016/S0378-4754(02)00193-3.

[3] R. S. Grimshaw e M. Maleewong. "Transcritical flow over obstacles and holes: forced Korteweg-de Vries framework". Em: **Journal of Fluid Mechanics** (2019). DOI: 10.1017/jfm.2019.767.

[4] L. N. Trefethen. **Spectral Methods in Matlab**. Philadelphia: SIAM, 2000. ISBN: 978-0-89871-465-4.

