Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Alguns Exemplos de Aplicação de Métodos de Mel'nikov em Campos Vetoriais Contínuos por Partes

Jeferson Cassiano[1]
CMCC/UFABC, Santo André, SP

As fontes de descontinuidade em problemas motivados por aplicações práticas originam-se da própria modelagem do mesmo como, por exemplo, sistemas eletromecânicos onde, devido à diferença em ordem de grandeza de velocidade de sistemas eletrônicos (ver [1]) e mecânicos, pode ser conveniente descrever o sistema como descontínuo; ou mesmo pela natureza física do problema (atrito seco, por exemplo, [2]). Assim, a descontinuidade pode estar no modelo ou no controlador. No caso de sistemas lineares com parte homogênea autônomas as técnicas são bem conhecidas. Porém as mesmas não podem ser imediatamente extendidas para situações mais gerais.

O presente trabalho visa abordar técnicas de identificação de ciclos-limite (ver [3]) e predição de caos (ver [4]) no cenário homoclínico (ver [5]) em sistemas dinâmicos descritos por algumas classes de campos vetoriais contínuos por partes perturbados. Para isto, separamos o problema em duas partes: descontinuidade no sistema não-perturbado e descontinuidade na perturbação.

Para o primeiro caso, sejam os Hamiltonianos suaves por partes

$$\mathcal{H}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto P(x) + |y| \text{ e } \mathcal{H}_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{y|y|}{2} + \frac{|y|-y}{2}, \tag{1}$$

sendo P um polinômio com extremo(s) local (locais).

Sejam os campos perturbados (não Hamiltonianamente) associados

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x} = -sgn(y) + \epsilon f_1(x,y,\epsilon) \\ \dot{y} = P'(x) + \epsilon f_2(x,y,\epsilon) \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{c} \dot{x} = \frac{1-sgn(y)}{2} - |y| + \epsilon g_1(x,y,t,\epsilon) \\ \dot{y} = x + \epsilon g_2(x,y,t,\epsilon) \end{array} \right. \tag{2}$$

sendo f_1, f_2 perturbações não Hamiltonianas; g_1, g_2 perturbações $T-$periódicas com respeito ao parâmetro t. O polinômio P é tal que o sistema admite ao menos uma singularidade eliptica $(x^*, 0)$: $qP"(x^*) < 0,\ q = \pm 1$ e x^* é a singularidade do sistema em $h^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R} \times \{0\},\ h(x,y) = y$. Para o segundo sistema, a singularidade está em $x^* = 0$, o campo é periódico no tempo e o sistema não perturbado tem órbita homoclínica. Estes sistemas são involutivos com involuções $\Phi_1(x,y) = (x,-y)$ e $\Phi_2(x,y) = (-x,y)$, respectivamente.

Pode-se mostrar que as respectivas funções de Poincaré-Mel'nikov são

$$\begin{aligned} M_0(H) = &\int_{x_1(I)}^{x_2(H)} \left(P'(x) f_1\left(x, P(x) - H, 0\right) - f_2\left(x, P(x) - H, 0\right)\right) dx + \\ &+ \int_{x_1(H)}^{x_2(H)} \left(P'(x) f_1\left(x, H - P(x), 0\right) + f_2\left(x, H - P(x), 0\right)\right) dx, \end{aligned} \tag{3}$$

sendo x_1, x_2 zeros dos polinômios $H - P$ e $P - H$ onde $\mathcal{H}_1^{-1}(\{H\})$ é fechada; e, com a perturbação $\epsilon\left(A\cos\omega t - x, 0\right)$ como exemplo, temos $M_0(t) = A\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\left(\omega t - \arccos\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) - 1 - \frac{\pi}{2}$,

[1]jeferson.cassiano@ufabc.edu.br

© 2023 SBMAC

sendo

$$\alpha = \frac{\cos(\tan^{-1}\omega) + \cos(\omega\pi + \tan^{-1}\omega)}{\sqrt{1+\omega^2}} + \frac{\omega \sin \omega\pi}{\omega^2 - 1} \text{ and} \tag{4}$$

$$\beta = \frac{\sin(\omega\pi + \tan^{-1}\omega) - \sin(\tan^{-1}\omega)}{\sqrt{1+\omega^2}} + \frac{\omega(1+\cos\omega\pi)}{1-\omega^2} \tag{5}$$

Estes exemplos não apresentam grande dificuldade já que os integrandos são contínuos por partes e a integral de Mel'nikov pode ser expressa como uma soma finita de integrais.

Para o segundo caso, seja a equação do pêndulo perturbado $\ddot{x}+\epsilon\dot{x}+sen(x) = \epsilon A(sgn\circ\, sen)(\omega t)$. A função de Poincaré-Mel'nikov é

$$\left(\frac{M_0}{4}\right)(t) = A\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\left[\tan^{-1}\tanh\frac{t}{2} + \frac{(k+1)\pi}{\omega} - \tan^{-1}\tanh\frac{t}{2} + \frac{k\pi}{\omega}\right] - 2 \tag{6}$$

Para aplicar o critério de Mel'nikov, há necessiade de certa regularidade na função acima. Pelo teste M de Weierstrass é possivel garantir continuidade de funções de Mel'nikov deste tipo mostrando que a convergência é absoluta. A diferenciabilidade, porém, não é garantida. Assim fazemos uso do índice topológico de Brouwer para contornar tal obstáculo.

Com tais resultados podemos verificar zeros simples de Mel'nikov em sistems que apresentem descontinuidades do campo. O primeiro caso, por exemplo, apresenta zeros simples se $|A| > \frac{2+\pi}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ se $\omega \neq 1$; e $|A| > \frac{2+\pi}{\sqrt{2+\pi^2}}$, caso contrário.

Agradecimentos

O autor é parcialmente apoiado por FP7-PEOPLE-2012-IRSES-316338.

Referências

[1] A. Jacquemard, W. F. Pereira e M. A. Teixeira. "Generic Singularities of Relay Systems". Em: **Journal of Dynamical and Control Systems** 13 (2007), pp. 503–530.

[2] J. Cassiano A. R. O. Fonseca e M.F.S. Lima. "Normally hyperbolic sets in discontinuous dry friction oscillators". Em: **I. J. Bifurcation and Chaos** 0 (2015), pp. 3989–4009.

[3] M. A. Teixeira. "Generic bifurcation of certain singularities". Em: **Boll. Un. Mat. Ital. B** 16 (1979), pp. 283–254.

[4] D. Benmerzouk e J. Barbot. "An Analysis of Route to Chaos for Piecewise Smooth Systems Submitted to nonsmooth Transitions". Em: **I. J. Bifurcation and Chaos** 20 (2010), pp. 3989–4009.

[5] E. Ponce J. Llibre e A. E. Teruel. "Horseshoes Near Homoclinic Orbits for Piecewise Linear Differential Systems in $\mathbb{R}^3$". Em: **International Journal of Bifurcation and Chaos** vol 17 (2004), pp. 1171–1184.

© 2023 SBMAC