Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Redução do mal-condicionamento do sistema linear resultante do MEFG por meio de adaptação do ML

Gustavo Alves Lima[1]
Engenharia Mecânica, IFES, São Mateus, ES
Werley G. Facco[2]
Coordenadoria de Formação Geral, IFES, São Mateus, ES
Alex S. Moura[3]
Departamento de Economia, UFJF, Governador Valadares, MG

A solução numérica via Método de Elementos Finitos Generalizado (MEFG) de equações diferenciais resulta na solução de um sistema linear, que em geral é de grande dimensão, esparso e mal-condicionado [1, 2]. Assim, auxiliar a resolução do sistema linear resultante é facilitar a aplicação do MEFG. Nesse contexto, este trabalho visa melhorar a resolução do sistema linear subproduto da análise de propagação de onda eletromagnética via MEFG com enriquecimento por ondas planas [1]. Observou-se que o uso de funções de enriquecimento por ondas planas acarretava na criação de linhas Linearmente Dependentes (LD) durante a imposição de Multiplicadores de Langrange (ML). Remover as linhas e colunas conflitantes reduziu o número de condição da matriz e facilitou a resolução do sistema utilizando o Método dos Bigradientes Conjugados (BICG).

O domínio do problema (Ω) consiste em um quadrado 10 m x 10 m com dois subdomínios (Ω_a e Ω_b) de materiais distintos separados por uma interface Γ (Fig. 1a). A equação que governa o problema é a Equação de Helmholtz, e aplica-se o ML na interface entre os subdomínios para forçar a continuidade da função incógnita [1].

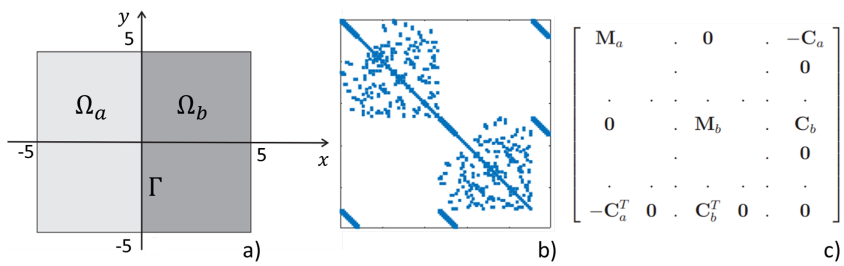

Figura 1: Domínio do problema (a) e características da matriz subproduto do MEFG: padrão de esparsidade da matriz (b) e submatrizes que a compõe (c). Fonte: Adaptado de [1].

Utilizando 20 direções de onda, a matriz que compõe o sistema linear é quadrada, esparsa (com $5,12\%$ dos seus elementos não nulos), com dimensão 2480 x 2480 e número de condição $2,77 \cdot 10^{34}$. A Fig. 1b mostra o padrão de esparsidade da matriz, em que se observa 4 submatrizes (Fig. 1c): M_a (matriz associada a Ω_a), M_b (matriz associada a Ω_b), C_a (matriz associada ao ML na região Ω_a) e C_b (matriz associada ao ML na região Ω_b).

[1]2001gustavoalves@gmail.com
[2]werleyfacco@ifes.edu.br
[3]alexsmoura100@gmail.com

Os elementos de C_a e C_b são formados pelas integrais de contorno na forma da Equação 1, em que Γ refere-se à interface entre os subdomínios, N_i e N_j são duas das funções de base do MEFG; e ω_{ka}^l e ω_k^l são duas funções de onda plana.

$$\int N_i \omega_{ka}^l|_\Gamma N_j \omega_k^l|_\Gamma d\Gamma \tag{1}$$

As funções de onda plana seguem a Equação 2, em que α é a direção característica da onda [1].

$$\omega_k^l(x,y) = \exp(jk \cdot (x \cdot cos(\alpha) + y \cdot sen(\alpha))) \tag{2}$$

Em Γ, como $x = 0$, $\omega_k^l(x,y) = \exp(jky \cdot sen(\alpha))$. Assim, há integrais na forma da Equação 1 que geram valores iguais, pois o ângulo de duas direções de onda em um mesmo nó e subdomínio apresentam o mesmo seno, o que gera a presença de linhas e colunas LD na matriz. Remover as linhas e as colunas LD reduz o tamanho e o mal-condicionamento do sistema linear.

A Tabela 1 mostra alguns parâmetros obtidos na resolução do sistema linear aplicando o BICG com tolerância relativa de 10^{-5} para o problema com e sem a adaptação. O tempo médio e o desvio padrão gasto na resolução do sistema linear foi analisado com base em 10 repetições. O método foi aplicado em notebook Intel Pentium Gold 7505, com 4Gb de RAM e Windows 10, utilizando o software MATLAB R2021b.

	MEFG sem a adaptação	MEFG com a adaptação
Erro na componente x	0,0074	0,0072
Erro na componente y	0,0096	0,0089
N° de iterações no BICG	9505	9316
N° de condição da matriz	$2,77 \cdot 10^{34}$	$1,74 \cdot 10^{19}$
Tempo de solução do SL (s)	144,82 ± 21,24	137,22 ± 10,60

Tabela 1: Variação do erro, número de condição da matriz, tempo de resolução do sistema linear (SL) e número de iterações do BICG no problema com e sem a adaptação

Remover as linhas e colunas duplicadas reduziu $4,38\%$ das incógnitas do problema e $9,15\%$ dos elementos não nulos da matriz. Note que a adaptação gerou também redução do erro na simulação, melhoria do condicionamento da matriz, redução do número de iterações e do tempo médio de resolução do sistema linear.

Portanto, analisar as características geométricas do problema juntamente com a seleção das funções de enriquecimento contribuem para melhoria no método de resolução do sistema linear e consequentemente do MEFG.

Agradecimentos

Esse trabalho possui suporte em parte pela FAPES, FAPEMIG, CNPq e CAPES.

Referências

[1] W. G. Facco. "Tratamento de descontinuidade de material no Método de Elementos Finitos Generalizado". Tese de doutorado. Universidade Federal de Minas Gerais, 2012.

[2] O. Ozgun e M. Kuzuoglu. **MATLAB-based Finite Element Programming in Electromagnetic Modeling**. New York: CRC Press, 2019.

