Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Relações de Estrutura para Polinômios Ortogonais no Círculo Unitário

Karina Seviero Rampazzi[1] Cleonice F. Bracciali[2]
Depto de Matemática/UNESP, São José do Rio Preto, SP
Luana de Lima Silva Ribeiro[3]
Depto de Matemática/UnB, Brasília, DF

Uma sequência de polinômios mônicos $\{\Phi_n\}_{n\geq 0}$, onde Φ_n é de grau n, é ortogonal sobre o círculo unitário com relação a função peso w em $\theta \in [0, 2\pi]$ e $z = e^{i\theta}$, se satisfaz

$$\int_0^{2\pi} \Phi_n(z)\overline{\Phi_m(z)}w(\theta)d\theta = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ k_n^{-2}, & \text{se } n = m, \quad \text{com} \quad k_n > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Estes polinômios satisfazem uma relação, conhecida como relação de Szegő, dada por

$$\Phi_n(z) = z\Phi_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1}\Phi^*_{n-1}(z), \quad n \geqslant 1, \tag{2}$$

onde $\Phi_0(z) = 1$, $\Phi^*_n(z) = z^n\overline{\Phi_n(1/\overline{z})}$ são os polinômios recíprocos e $\alpha_{n-1} = -\overline{\Phi_n(0)}$ são conhecidos como coeficientes de Verblunsky. Ver, por exemplo, os textos [1] e [2].

Quando uma função peso w, definida em um intervalo real, satisfaz uma equação de Pearson dada por $[\sigma(z)w(z)]' = \tau(z)w(z)$, onde σ e τ são polinômios, os polinômios ortogonais na reta real associados são classificados em clássicos ou semi-clássicos, dependendo dos graus dos polinômios σ e τ. Se σ tem grau menor ou igual a 2 e τ é um polinômio de grau 1, os polinômios ortogonais cuja função peso satisfaz a equação de Pearson são chamados de polinômios ortogonais clássicos. No caso semi-clássico, σ é um polinômio de grau maior que 2 ou τ é um polinômio de grau diferente de 1, ver [3].

É bem conhecido que polinômios ortogonais clássicos ou semi-clássicos na reta real satisfazem relações que envolvem derivadas e os próprios polinômios, tais relações são conhecidas como relações de estrutura. No caso dos polinômios ortogonais no círculo unitário, poucos exemplos de relações de estrutura são conhecidos.

Neste trabalho consideramos uma função peso w definida no círculo unitário, ou seja, $\theta \in [0, 2\pi]$ e com $z = e^{i\theta}$, que satisfaz a equação do tipo Pearson

$$\frac{d}{d\theta}\left[\sigma(e^{i\theta})w(\theta)\right] = \tau(e^{i\theta})w(\theta), \tag{3}$$

onde as funções σ e τ são polinômios de grau no máximo 2 e $\sigma(e^{i\theta}) = 0$ nos pontos de sigularidade de $1/w$. Ver [4].

Denotando $\sigma(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$ e $\tau(z) = b_2z^2 + b_1z + b_0$, mostramos que os polinômios ortogonais associados a w, que satisfazem (3), nos fornece a seguinte relação de estrutura

$$\sigma(z)\Phi'_n(z) = \mathcal{S}_{n,n+1}\Phi_{n+1}(z) + \mathcal{S}_{n,n}\Phi_n(z) + \mathcal{S}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) + \mathcal{R}_n\Phi^*_{n+1}(z), \ n \geqslant 2, \tag{4}$$

[1]karina.rampazzi@unesp.br
[2]cleonice.bracciali@unesp.br
[3]luana.m22@gmail.com

onde $\mathcal{S}_{n,n} = na_1 - a_2\gamma_n + [ib_2 - (n-1)a_2]\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}$, $\mathcal{S}_{n,n-1} = (ib_0 + na_0)(1 - |\alpha_{n-1}|^2)$, $\mathcal{S}_{n,n+1} = \dfrac{na_2 + [ib_2 - (n-1)a_2]|\alpha_n|^2}{1 - |\alpha_n|^2}$, $\mathcal{R}_n = \dfrac{(ib_2 + a_2)\overline{\alpha}_n}{1 - |\alpha_n|^2}$, $\gamma_n = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\alpha}_j\alpha_{j-1}$ e α_n são os coeficientes de Verblunsky.

Como exemplo específico, consideramos uma classe especial de polinômios ortogonais no círculo unitário com os coeficientes de Verblunsky complexos, apresentada em [5]. Tais polinômios são ortogonais com relação à função peso

$$w(\theta) = e^{-\eta\theta}[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}, \tag{5}$$

onde $\eta \in \mathbb{R}$, $\lambda > -1/2$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Mostramos que estes polinômios satisfazem a relação de estrutura

$$\begin{aligned}(z-1)^2\Phi_n'(z) &= \left(n - \frac{(b+1)|\alpha_n|^2}{1-|\alpha_n|^2}\right)\Phi_{n+1}(z) - (\overline{b} + 2n)\Phi_n(z) \\ &\quad + (\overline{b} + n)[1 - |\alpha_{n-1}|^2]\Phi_{n-1}(z) - \frac{(b+1)\overline{\alpha}_n}{1-|\alpha_n|^2}\Phi_{n+1}^*(z),\end{aligned} \tag{6}$$

para $n \geqslant 2$, onde $b = \lambda + i\eta$, $z = e^{i\theta}$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

Agradecimentos

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - código de financiamento 001 e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) proc. no. 2022/09575-5, pelo apoio financeiro.

Referências

[1] M. E. H. Ismail. **Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable (Encyclopedia of Mathematics and its Applications)**. Vol. 98. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.

[2] B. Simon. **Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 1. Classical Theory**. Vol. 54. Providence: Amer. Math. Soc., 2005.

[3] W. Van Assche. **Orthogonal Polynomials and Painlevé Equations**. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2018.

[4] A. P. Magnus. **Special Topics in approximation theory: semi-classical orthogonal polynomials on the unit circle (manuscript)**. MAPA 3072A. Belgium: Université Catholique de Louvain, 2000.

[5] A. Sri Ranga. "Szegő polynomials from hypergeometric functions". Em: **Proceedings of the American Mathematical Society** 12 (2010), pp. 4259–4270. DOI: `https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2010-10592-0`.

