Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo numérico entre as buscas de Armijo e de Goldstein no Método do Gradiente

Emanuel Mendes Queiroz[1] Márcio Antônio de Andrade Bortoloti[2] Samara Viriato Vilar Dias[3]
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, BA

Na Otimização Contínua, desenvolve-se métodos que asseguram sequências que convergem para o ponto mínimo de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Tais métodos têm importantes aplicações práticas que podem ser vistas, por exemplo, na restauração de imagens, veja [1, Cap. 4]. Em geral, para obter sequências convergentes para pontos de mínimo de funções reais, é adotado o seguinte procedimento: toma-se um ponto inicial no domínio da função, uma direção de descida a partir deste ponto e, para a determinação de um novo ponto da sequência na direção de descida, aplica-se uma busca linear.

Neste trabalho, nós desenvolvemos um estudo numérico entre duas buscas lineares empregadas no Método do Gradiente. Esse método é um dos mais antigos e conhecidos na minimização de funções. Trata-se de um método iterativo que é linearmente convergente e que visa minimizar uma função utilizando a direção oposta à do vetor gradiente, que nos fornece o decrescimento mais acentuado da função objetivo.

A estratégia de utilizar uma busca linear é crucial para um algoritmo de minimização eficiente e seu problema está relacionado à determinação de um comprimento de passo aceitável que forneça um decrescimento suficiente na função objetivo. A importância dessa estratégia deve-se ao fato de que a maioria dos algoritmos iterativos para minimização requer uma busca em cada etapa do processo e, através da execução de buscas lineares sucessivas, é possível resolver problemas com dimensões superiores. Além disso, o comprimento de passo tem impacto significativo para garantir a convergência da sequência para um extremo de uma função.

Uma busca linear inexata muito utilizada para a determinação do comprimento de passo é a busca denominada Regra de Armijo, veja [2, Pág. 67]. Essa regra consiste em determinar um $\alpha_k \in [0, \delta)$, com $\delta > 0$, tal que

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + \eta_1 \alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k, \tag{1}$$

onde $x_k \in \mathbb{R}^n$, $d_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é uma direção de descida e $\eta_1 \in (0, 1)$. Essa busca impede comprimentos de passo grandes que forneçam pouco decrescimento para a função. A existência do comprimento de passo α_k é formalmente estabelecida em [2, Lema 3.1.4]. Entretanto, na Busca de Armijo podem ser admitidos passos muito pequenos, aumentando o esforço computacional, tornando assim a resolução do problema mais lenta.

Para contornar essa dificuldade, é proposto na literatura uma outra busca linear inexata que é conhecida como Regra de Goldstein, veja [2, Pág. 72]. Essa regra consiste em determinar um $\alpha_k > 0$, tal que

$$f(x_k) + \eta_2 \alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k \leq f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + \eta_1 \alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k, \tag{2}$$

[1] emanuelmqueiroz.emq@gmail.com
[2] mbortoloti@uesb.edu.br
[3] samaravvilar@gmail.com

onde $x_k \in \mathbb{R}^n$, $d_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é uma direção de descida e $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$. A desigualdade à direita é a de Armijo, que garante um descrescimento da função objetivo, já a desigualdade à esquerda busca eliminar a aceitação de comprimentos de passo muito pequenos.

A seguir, apresentamos formalmente o Método do Gradiente equipado com a Regra de Armijo ou com a Regra de Goldstein.

Algoritmo 1: MÉTODO DO GRADIENTE

1 Tome um ponto inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ e faça $k := 0$
2 $d_k := -\nabla f(x_k)$
3 Se $\|d_k\| > \varepsilon$, calcule α_k por (1) ou (2)
4 $x_{k+1} := x_k + \alpha_k d_k$
5 $k \leftarrow k + 1$ e retorne para o passo 2

No Algoritmo 1, o passo 2 apresenta a direção de descida do gradiente e no passo 3 é feito o cálculo do comprimento de passo α_k.

A fim de desenvolver um estudo numérico do Método do Gradiente com cada uma das buscas mencionadas, vamos considerar o problema de determinar o mínimo da função Quociente de Rayleigh (QR) e analisar o comportamento do método. Essa função é definida por $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = \frac{x^T A x}{x^T x}, \tag{3}$$

onde A é uma matriz simétrica de ordem $n \times n$ e $(\cdot)^T$ denota a matriz transposta. O valor mínimo da função definida em (3) é o menor autovalor da matriz simétrica A que define essa função. Dessa forma, utilizaremos no passo 2 a direção do gradiente de Rayleigh

$$d_k = \frac{-2(A - f(x_k)I)x_k}{(x_k^T x_k)}, \tag{4}$$

onde I é a matriz identidade de ordem $n \times n$.

Os experimentos numéricos serão desenvolvidos para determinar os minimizadores da função QR para diferentes dimensões. Vamos mostrar como a variação da dimensão afeta a determinação do comprimento de passo na Regra de Armijo e na Regra de Goldstein. A implementação do Algoritmo 1 com a direção (4) será feita utilizando a Linguagem de Programação Julia, [3], e serão feitos *performance profiles* para realizar a comparação entre as buscas.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao **Programa de Educação Tutorial Institucional da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - PETI/UESB** pelo apoio financeiro e por nos possibilitar desenvolver este trabalho.

Referências

[1] A. J. S. Neto e F. D. M. Neto. **Problemas inversos: conceitos fundamentais e aplicações**. EdUERJ, 2005.

[2] A. Izmailov e M. Solodov. **Otimização, volume 2: métodos computacionais**. IMPA, 2018.

[3] B. Lauwens e A. B. Downey. **Think Julia: how to think like a computer scientist**. O'Reilly Media, 2019.