Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aplicações de soma de conjuntos em grupos abelianos

Gabriel de F. Pinheiro[1]
IMECC, UNICAMP, Campinas
Matheus da Silva Xavier[2] Irene Magalhães Craveiro[3]
FACET, UFGD, Dourados, MS

Sejam $n, q \in \mathbb{Z}$ com $n > 0$ e seja $\mathbb{Z}_q$ um anel de classe residual módulo q. Chamamos os símbolos $\mathbb{Z}_q = \{0, 1, \cdots, q-1\}$ de alfabeto e os vetores de tamanho n, contidos no espaço vetorial $\mathbb{Z}_q^n$, de palavras. Qualquer subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}_q^n$ é chamado de código $q-$ário. As aplicações destes códigos são inúmeras, um exemplo é o código binário. Assim, este trabalho tem por objetivo utilizar as propriedades obtidas através da soma de conjuntos em grupos abelianos finitos e aplicar em um problema já conhecido da literatura, o Problema do Totobola, [3]. Vale observar que os resultados envolvendo teoria de códigos podem ser encontrados em [4]. Já os resultados envolvendo teoria de corpos e noções sobre espaços vetoriais podem ser vistos em [1] e [2].

Os estudos a respeito do anel dos inteiros já estão bem difundidos na matemática, principalmente em áreas como Análise Combinatória e Teoria Aditiva dos Números. Em combinatória aditiva, por exemplo, os problemas são classificados como diretos e inversos. Imaginemos dois subconjuntos contidos nos inteiros da forma $A + B = \{a + b; a \in A \wedge b \in B\}$. Quando procuramos informações sobre $A + B$ dados A e B temos um problema direto. Agora, quando buscamos informações sobre A e B a partir de $A + B$ temos um problema inverso.

Apresentaremos, a seguir, alguns resultados que nos permitirão fornecer alguns limitantes para a cardinalidade da soma de conjuntos no anel dos inteiros, que forma um conjunto abeliano com a soma.

Teorema 0.1. *Sejam $A \subset \mathbb{Z}, A \neq \emptyset$ e A finito. Considere $n = \#A$ e $N = \#(A + A)$. Então, $2n - 1 \leq N \leq \frac{n(n+1)}{2}$.*

Vejamos agora um resultado que fornece um limitante inferior e superior para a cardinalidade de $A + B$.

Teorema 0.2. *Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{Z}$ não vazios e finitos. Considere $n = \#A$, $m = \#B$ e $M = \#(A + B)$. Então, $n + m - 1 \leq M \leq mn$.*

Em seguida exploraremos alguns resultados envolvendo a soma de conjuntos nas classes residuais. Para isso, consideremos G um grupo abeliano e A e B subconjuntos finitos de G. Denota-se $A+B = \{g \in G | g = a+b; a \in A \wedge b \in B\}$. Para todo elemento $g \in G$, definimos o número de representações de g como sendo a soma de elementos de A e B por $r_{a,b}(g) = \#\{g = a+b; (a, b) \in A \times B\}$. Ou seja $r_{a,b}(g)$ é o número de pares ordenados de $A \times B$ tal que $g = a + b$.

Vejamos agora dois importantes resultados que nos fornece um limitante inferior para a soma de conjuntos $A + B$.

Teorema 0.3 (Chowla)**.** *Sejam $m \geq 2$ e A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{Z}_m$. Se $\overline{0} \in B$ e $mdc(b, m) = 1$ para todo $b \in B$ não nulo, então $\#(A + B) \geq \min\{m, \#A + \#B - 1\}$.*

[1] freitasgabriel688@gmail.com
[2] matheusdasilvaxavier@hotmail.com
[3] irenecraveiro@ufgd.edu.br

Teorema 0.4 (Cauchy - Davemport). *Seja p um número primo e A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{Z}_p$, então $\#(A+B) \geq \min\{p, \#A + \#B - 1\}$.*

Assim, tendo em vista o que desenvolvemos até aqui, apresentaremos uma aplicação da soma de conjuntos em grupos abelianos. Para isso, apresentaremos um problema conhecido como **Totobola**.

O Totobola é um jogo de apostas onde o apostador tenta adivinhar os resultados de um determinado número de partidas. Cada partida é realizada entre dois times, de modo que o resultado de cada partida pode ser: $0, 1$ ou 2. O conjunto de resultados das partidas é chamado de chave, ou seja, cada aposta representa uma chave.

Na Figura 1 vemos um exemplo de duas apostas distintas: uma de um jogo com 3 partidas e outra com 2 partidas. Na primeira aposta tem-se: A empata com B; C ganha de D e E perde de F. Na segunda aposta tem-se: G empata com H e I empata com J.

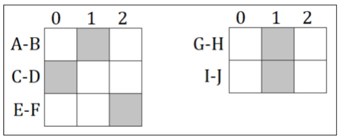

Figura 1: Exemplo de uma partida de Totobola. Fonte: Autor.

O problema do Totobola consiste em determinar o número mínimo de apostas d_n que o apostador deve fazer em um jogo com n partidas para que se garanta pelo menos $n-1$ resultados corretos. Como são três possibilidades de escolhas para cada partida, segue pelo princípio da contagem, que o número de chaves possíveis é 3^n. Cada aposta assegura um total de $2n+1$ chaves em que se acertam pelo menos $n-1$ resultados. Portanto, $d_n \geq 3^n/(2n+1)$.

Agora, considere que já temos um conjunto de apostas que cobre $n-1$ chaves de n partidas. Para garantir n resultados certos em $n+1$ partidas, basta acrescentar um tripla $\{0, 1, 2\}$ a cada uma dessas apostas, formando um conjunto com três vezes mais elementos. Assim, vemos que o número mínimo de apostas para se garantir n resultados corretos em $n+1$ partidas é menor ou igual do que o triplo de número mínimo de apostas para se garantir $n-1$ resultados corretos em n partidas. Ou seja, $d_{n+1} \leq 3d_n$ e daí, $d_n \leq 3d_{n-1}$. Portanto, $3^n/(2n+1) \leq d_n \leq 3d_{n-1}$.

Assim, a partir das ferramentas que exploramos neste trabalho é possível obter limitantes inferiores e superiores, tanto nos anéis dos inteiros quanto no anel das classes residuais. Esses resultados ajudam a compreender e solucionar alguns problemas relacionados a Teoria dos códigos, mais precisamente códigos de cobertura, que é uma linha de pesquisa em ascensão. Além disso, a ideia do trabalho é apresentar uma aplicação de somas de conjuntos em grupos abelianos por meio de um problema clássico já explorado, o Problema do Totobola. Este, como fora apresentado, é modelado por meio de código ternário sobre o corpo $\mathbb{Z}_3$, onde a complexidade do problema aumenta conforme aumentamos o número de partidas.

Referências

[1] G. Iezzi e H. H. Domingues. **Álgebra Moderna**. São Paulo, 2003.

[2] R. O. Janesch e J. I. Taneja. **Álgebra I**. Santa Catarina: UFSC, 2011.

[3] A. Machiavelo e R. Reis. "O problema do Totobola". Em: **Boletim da SPM 61** (2009), pp. 39–45.

[4] O. J. Santos e J. I. Carmelo. **Códigos de Cobertura sobre Anéis Finitos**. Maringá: UEM, 2014.

