Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análise Numérica de Condução de Calor Transiente

Gustavo B. Grassi[1]
Engenharia Mecânica, IFES, São Meteus, ES
Gustavo A. Lima[2]
Engenharia Mecânica, IFES, São Mateus, ES
Werley G. Facco[3]
Coordenadoria de Formação Geral, IFES, São Mateus, ES

1 Introdução

A resolução de problemas da engenharia modelados por equações diferenciais através de métodos analíticos muitas vezes não é possível, o que torna o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método das Diferenças Finitas (MDF) ferramentas úteis para a obtenção de resultados por aproximação numérica. Assim, este trabalho visa aplicar o MEF na análise de condução de calor em regime transiente para uma barra linear, discretizado no tempo pelo MDF e considerando as propriedades da fibra de vidro.

2 Formulação

Na aplicação do método em 1D, a distribuição de temperatura na barra é determinada de acordo com a Equação 1 (equação diferencial geral da condução de calor), em que $k(x)$ é o coeficiente de condutividade térmica, T é a temperatura no domínio $[x_0, x_1]$, ρ é a densidade, C_p é o calor específico e t é o tempo.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(x\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t} \tag{1}$$

Em seguida, a formulação fraca do problema é desenvolvida [1] e é feita a discretização temporal pelo MDF com passo de tempo Δt [2]. Assim, encontra-se a Equação 2 (forma fraca), onde w é uma função de teste, T_n é a temperatura no instante n e T_{n-1} é a temperatura no instante anterior.

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial\, x}\left(k\left(x\right)\frac{\partial\, T_n}{\partial\, x}w\, dx\right)-\int_0^L \frac{\rho C_p T_n w}{\Delta t}\, dx+\int_0^L \frac{\rho\, C_p T_{n-1} w}{\Delta t}\, dx \tag{2}$$

A solução de T em cada elemento é aproximada por um polinômio de grau 1 (Equação 3), em que a_i representa os valores de temperatura nos m nós da barra e N_i são as funções de forma.

$$T^H=\sum_{i=1}^{m} a_i\cdot N_i \tag{3}$$

Sendo assim, T^H é inserido na Equação 2, obtendo a Equação 4. Variando ω entre as funções de forma, conforme método de Galerkin, a equação matricial global é estabelecida.

[1]gustavograssi1234@gmail.com
[2]2001gustavoalves@gmail.com
[3]werleyfacco@ifes.edu.br

$$\sum_{i=1}^{n} ai \cdot \left[\int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(k\left(x\right) \frac{\partial Ni}{\partial x} w \, dx \right) - \frac{1}{\Delta t} \int_0^L \rho CpNiw \, dx \right] = -\sum\nolimits_{i=1}^{n} ai^{-1} \cdot \int_0^L \frac{\rho CpNiw}{\Delta t} dx \quad (4)$$

3 Resultados e discussões

Para aplicar o método, foi considerada uma barra de 1 m de comprimento inicialmente a 20°C, com seção transversal de área desprezível e com temperaturas de 100 °C e 0 °C em cada ponta. Após isso, as condições de contorno $T(0,t) = 100$ e $T(1,t) = 0$ são aplicadas na equação matricial global, o que a torna não singular e permite encontrar as temperaturas. Utilizou-se o passo de tempo $\Delta t = 0.01s$. Os resultados númericos foram encontrados via software MATLAB R2022B.

Na Fig. 1a, é possível observar a variação de temperatura ao longo do tempo na barra. Na Fig. 1b, visualiza-se a temperatura na barra em alguns instantes de tempo de forma mais detalhada por meio de um gradiente de cores. Note que há variações mais bruscas da temperatura da barra nos tempos iniciais; e com o passar do tempo, a solução tende a convergir para a solução em regime permanente, que pode ser encontrada pelo método analítico [2].

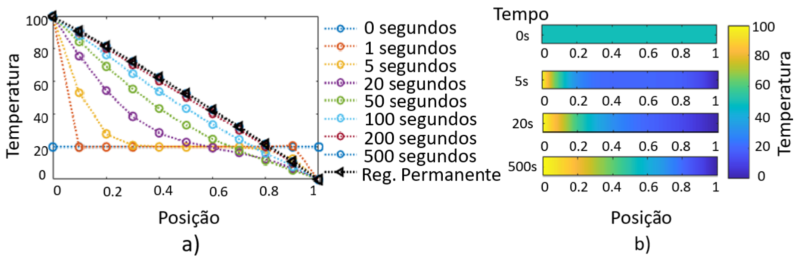

Figura 1: Variação da temperatura na barra ao longo do tempo (a) e temperaturas na barra para alguns instantes de tempo (b)

4 Conclusão

Neste trabalho, utilizando uma abordagem numérica, foi possível estimar a temperatura em qualquer região da barra e em qualquer instante do tempo. Como era esperado, encontrou-se um resultado semelhante à solução para o regime permanente do problema utilizando a discretização temporal por diferenças finitas, o que dá indício da coerência dos resultados.

Agradecimentos

Esse trabalho possui suporte em parte pela FAPES, FAPEMIG, CNPq e CAPES.

Referências

[1] J. Fish e T. Belytschko. **Um Primeiro Curso em Elementos Finitos**. 1a. ed. São Paulo: LTC, 2009.

[2] Y. A. Çengel e A. J. Ghajar. **Transferência de Calor e Massa: Uma Abordagem Prática**. 4a. ed. Porto Alegre,RS: Editora McGrawHill, 2012.