

Análise de problema de propagação de onda 3D via MEF

Renan Coswosk da Silva¹, Gustavo Alves Lima²

Engenharia Mecânica, IFES, São Mateus, ES

Werley G. Facco³

Coordenadoria de Formação Geral, IFES, São Mateus, ES

Elson J. Silva⁴

Departamento de Engenharia Elétrica, UFMG, Belo Horizonte, MG

Alex S. Moura⁵

Departamento de Economia, UFJF, Governador Valadares, MG

A resolução numérica das Equações de Maxwell é muito aplicada nas engenharias pois é inviável ou impossível obter uma solução analítica em grande parte dos problemas práticos. Há um crescente estudo da aplicação do Método de Elementos Finitos (MEF) na resolução numérica dessas equações, pois o método é mais versátil que as abordagens mais tradicionais. Porém, tal abordagem pode levar a soluções espúrias, principalmente para elevados valores do número de onda (k) [1]. Assim, este trabalho analisa a aplicação do MEF na solução de problema de espalhamento de ondas eletromagnéticas de um dipolo elétrico para alguns valores de k .

A forma forte do problema é dada pela Equação de Helmholtz [1]. Aplicando o método dos resíduos ponderados, a forma fraca do problema é dada por [1]:

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \vec{E}) \cdot (\nabla \times \vec{F}) d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\nabla \times \vec{E} \times \vec{n}) \cdot \vec{F} dS - k^2 \int_{\Omega} (\vec{E} \cdot \vec{F}) d\Omega = 0 \quad (1)$$

em que \vec{E} é o campo elétrico e \vec{F} é a função de teste. A proposta original tem várias condições de contorno [1, 2], mas, pela complexidade do modelo, os resultados foram obtidos considerando todos os contornos de Dirichlet dada pela solução analítica do problema – Equação 2, sendo r , \hat{n} e \hat{z} , respectivamente, o módulo, um versor e a projeção no eixo z do vetor posição).

$$\vec{E}(x, y, z) = 377r^{-2} \exp(-jkr) \cdot [((\hat{z} \cdot \hat{n})\hat{n} - \hat{z})jkr + (3(\hat{z} \cdot \hat{n})\hat{n} - \hat{z})(1 + (jkr)^{-1})] \quad (2)$$

O domínio analisado é a região entre duas esferas concêntricas de raios 0.1 e 1. Aplicadas algumas condições de simetria, obtém-se o sólido da Fig. 1a. A esfera menor representa o dipolo elétrico que irradia um campo eletromagnético. O modelo foi implementado na plataforma FEniCS usando funções de base nodal, polinomiais do 1° grau, contínuas e definidas em partes. Na Fig 1b encontra-se o resultado numérico (obtido com a malha mais refinada dentre as utilizadas) e o analítico para o campo eletromagnético sobre uma reta que liga um ponto na esfera interior (ponto (0,088; 0,036; 0,055)) a um ponto na esfera exterior (ponto (0,792; 0,328; 0,495)) para $k = 0.01$.

¹rcoswoskdasilva@gmail.com

²2001gustavoalves@gmail.com

³werleyfacco@ifes.edu.br

⁴elson@cpdee.ufmg.br

⁵alexsmoura100@gmail.com

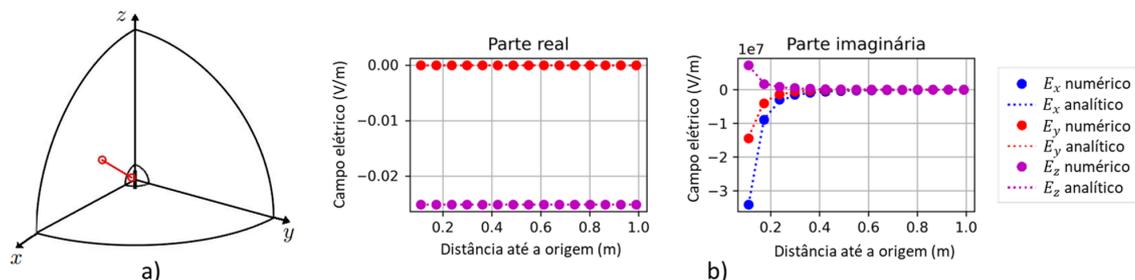


Figura 1: Domínio do problema (a) e resultado analítico e numérico para o campo eletromagnético sobre a reta que liga os pontos $(0, 088; 0, 036; 0, 055)$ e $(0, 792; 0, 328; 0, 495)$ no domínio (b). A reta analisada encontra-se destacada em (a). E_x , E_y e E_z correspondem às componentes x , y e z do campo, respectivamente.

Na Fig. 2, encontra-se a variação do erro (baseado no erro relativo da norma L2 [2]) com o refinamento de malha para alguns valores de k , sendo n o número de nós da malha.

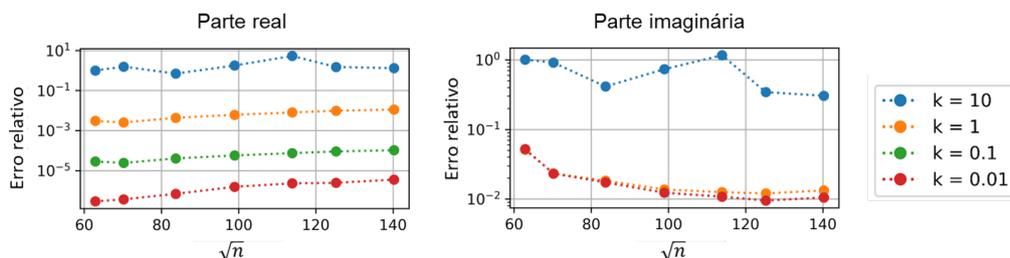


Figura 2: Variação do erro com o refinamento de malha para alguns valores de k

Note que a parte real da solução apresenta erros menores do que a parte imaginária. Isso se justifica pelo comportamento assintótico da parte imaginária próxima ao dipolo. Além disso, note que quanto maior k , maior o erro da simulação, pois o comportamento ondulatório torna-se mais expressivo e mais difícil de ser aproximado. Para $k = 10$, por exemplo, o resultado não convergiu.

Assim, neste trabalho discutiu-se algumas limitações da aplicação do MEF no eletromagnetismo. Note que o erro tende a diminuir com o refino da malha na parte imaginária (onde se encontram os maiores erros), mas permanece alto para k elevado, corroborando com o exposto em [1, 2]. Trabalhos futuros podem ser feitos usando funções enriquecidas [2] e inserindo condições de contorno de forma mais adequada.

Agradecimentos

Esse trabalho possui suporte em parte pela FAPES, FAPEMIG, CNPq e CAPES.

Referências

- [1] O. OZGUN e M. KUZUOGLU. **MATLAB-based Finite Element Programming in Electromagnetic Modeling**. New York: CRC Press, 2019.
- [2] W. G. Facco. “Tratamento de descontinuidade de material no Método de Elementos Finitos Generalizado”. Tese de doutorado. Universidade Federal de Minas Gerais, 2012.