Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Soluções a Diferenças Finitas da Temperatura de um Escoamento Transiente em um Tubo Unidimensional

Thiago Burgo Ikeda[1], Mateus Mitsuo Goto Dakuzaku[2], Gilcilene Sanchez de Paulo[3]
FCT-UNESP, Presidente Prudente, SP

Neste trabalho, a distribuição de temperatura em um tubo unidimensional, com temperaturas prescritas nas extremidades, foi obtida numericamente pela técnica de diferenças finitas. Além disso, uma breve discussão da solução do sistema linear resultante, utilizando os métodos iterativos de Jacobi, de Gauss-Seidel e dos Gradientes Conjugados (GC), foi realizada.

Considere a seguinte equação de advecção-difusão (1) unidimensional e transiente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{U}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \mathcal{D}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \mathcal{S}_\phi, \quad \text{em } \Omega, \tag{1}$$

que modela a temperatura $\phi(x,t)$ de um escoamento em um tubo unidimensional com velocidade constante $\mathcal{U}$. O fluido apresenta coeficiente de difusão constante $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}_\phi$ é um termo fonte de calor através da parede do tubo e $\Omega = (0,1)$ é o domínio unidimensional, cuja fronteira é dada por $\partial\Omega = \{0,1\}$ (ver [2], por exemplo).

No estado estacionário, desprezando-se o termo-fonte e o transporte da temperatura ϕ, obtém-se, na verdade, uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, mas que pode ser vista como um protótipo de uma equação elíptica unidimensional, descrita por:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \tag{2}$$

sujeita as condições de contorno do tipo Dirichlet dadas por $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1$. A discretização da equação (2) pelo método de diferenças finitas centradas [1], aplicado em uma malha de espaçamento h definida por $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, \cdots, N$, resulta no sistema de equações de diferenças finitas:

$$\frac{1}{h^2}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) = 0, \tag{3}$$

em que U_i representa uma solução aproximada para $u(x_i)$. O sistema de equações (3) pode ser escrito na forma de um sistema linear $Au = b$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{(x_1)} \\ U_{(x_2)} \\ U_{(x_3)} \\ \vdots \\ U_{(x_{N-1})} \\ U_{(x_N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

A matriz A associada a esse sistema linear (4) é esparsa, simétrica, definida-negativa e diagonalmente dominante, que são propriedades suficientes para garantir a convergência da solução numérica empregando os métodos iterativos de Jacobi, Gauss-Seidel e Gradientes Conjugados.

[1]t.ikeda@unesp.br - Bolsista IC/FAPESP Proc. 2023/00695-0
[2]mateus.mitsuo@unesp.br
[3]gilcilene.sanchez@unesp.br

O método de Jacobi, devido à sua simplicidade de implementação é muito utilizado, contudo, sua convergência pode ser excessivamente lenta. O método de Gauss-Seidel é eficiente e com convergência relativamente lenta [1]. O método GC é um algoritmo que aproveita a estrutura das matrizes esparsas para obter soluções mais precisas e com convergência mais rápida [2].

A Figura 1 apresenta uma comparação entre as soluções numéricas e analítica. Qualitativamente, pode-se observar que o método dos Gradientes Conjugados fornece uma solução mais acurada. Embora a matriz A possua boas propriedades, ela é mal-condicionada, fazendo com que as soluções para dimensões altas do sistema linear não sejam acuradas [2].

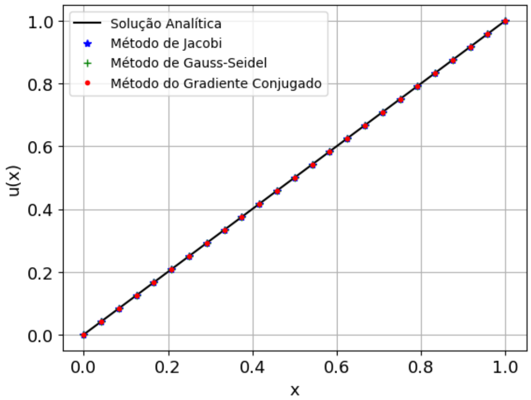

Figura 1: Soluções numéricas na malha de 25 pontos (símbolos) em comparação com a solução analítica.

Para uma análise mais quantitativa, a Tabela 1 mostra os desempenhos dos métodos adotados com respeito ao número de condição da matriz e o erro relativo utilizando a norma-2.

Tabela 1: Erro obtido entre a solução numérica e a analítica.

Número de pontos da malha	$cond(A)$	Jacobi	Gauss-Seidel	GC
10	$32,16$	$5,61 \times 10^{-10}$	$3,67 \times 10^{-10}$	$1,83 \times 10^{-16}$
25	$232,78$	$2,79 \times 10^{-9}$	$1,97 \times 10^{-9}$	$1,66 \times 10^{-16}$
50	$972,44$	$8,36 \times 10^{-9}$	$5,91 \times 10^{-9}$	$5,33 \times 10^{-16}$

Conforme os resultados da Tabela 1, de fato, o método dos Gradientes Conjugados é o mais indicado dentre os comparados quando a matriz envolvida for esparsa, simétrica e definida-positiva (obtida ao multiplicar o sistema (4) por -1). Segundo a literatura, recomenda-se o uso de pré-condicionadores, inclusive para o método GC, para tratar melhor o mal-condicionamento da matriz A em altas dimensões [1, 2].

Agradecimentos

À fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) (Proc. n^o 2023/00695-0).

Referências

[1] J.A. Cuminato e M. Meneguette Jr. **Discretização de Equações Diferencias Parciais: Técnica de Diferenças Finitas**. 1a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. ISBN: 9788583370055.

[2] R.J. Leveque. **Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-state and Time-dependent Problems**. 2a. ed. Filadélfia, EUA: Society for Industrial e Applied Mathematics, 2007. ISBN: 9780898716290.